Logika és számításelmélet

I. rész
Logika
Második előadás

Tartalom

Igazságértékelés függvény

Egy formula **igaz-/hamis**halmazának előállításához keressük a formula bázisának interpretációira azokat a feltételeket, amelyek biztosítják, hogy ő az igazhalmaz illetve a hamishalmaz eleme legyen.

Ennek eszköze a φA^{α} **igazságértékelés függvény** ($\alpha = \mathbf{i}$ vagy $\mathbf{h}$), amely egy A formula esetén az igazságtábla felírása nélkül megadja a formula közvetlen részformuláin keresztül az A interpretációira vonatkozó $\varphi A^{\mathbf{i}}$ és a $\varphi A^{\mathbf{h}}$ feltételeket, amelyeket teljesítő interpretációkban a formula értéke $\mathbf{i}$ vagy $\mathbf{h}$ lesz.

A φA^{α} függvény értelmezési tartománya a formulák halmaza értékkészlete a formula interpretációira vonatkozó feltételek.

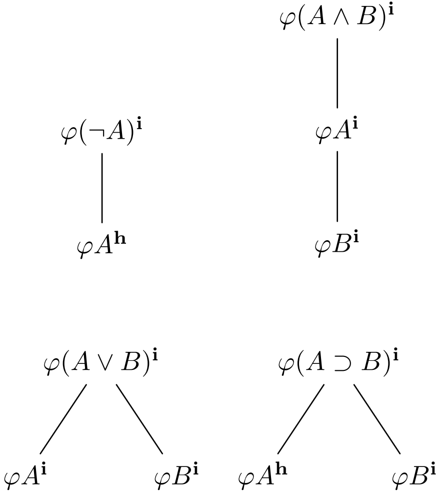
Igazságértékelés függvény

A φ-igazságértékelés függvény definiálása szerkezeti rekurzióval

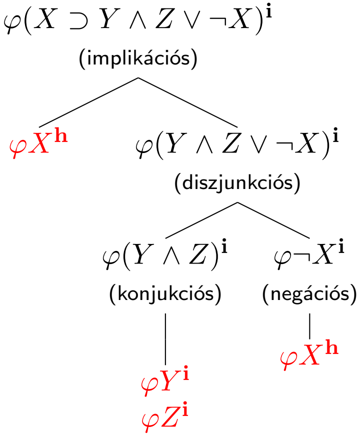
1. Ha A prímformula (ítéletváltozó), akkor $\varphi A^{\mathbf{i}}$ feltételt pontosan azok az $\mathcal{I}$ interpretációk teljesítik, amelyekben $\mathcal{I}(A) = i$, a $\varphi A^{\mathbf{h}}$ feltételt pedig azok, amelyekben $\mathcal{I}(A) = h$.
2. A $\varphi(\neg A)^{\mathbf{i}}$ feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek a $\varphi A^{\mathbf{h}}$ feltételek.
3. A $\varphi(A \wedge B)^{\mathbf{i}}$ feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek mind a $\varphi A^{\mathbf{i}}$, mind a $\varphi B^{\mathbf{i}}$ feltételek.
4. A $\varphi(A \vee B)^{\mathbf{i}}$ feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek a $\varphi A^{\mathbf{i}}$ vagy a $\varphi B^{\mathbf{i}}$ feltételek.
5. A $\varphi(A \supset B)^{\mathbf{i}}$ feltételek pontosan akkor teljesülnek, ha teljesülnek a $\varphi A^{\mathbf{h}}$ vagy a $\varphi B^{\mathbf{i}}$ feltételek.

A $\varphi(\neg A)^{\mathbf{h}}$, a $\varphi(A \wedge B)^{\mathbf{h}}$, a $\varphi(A \vee B)^{\mathbf{h}}$, és a $\varphi(A \supset B)^{\mathbf{h}}$ feltételek értelemszerűen adódnak.

Igazságértékelés szabályok grafikus ábrázolása



Példa – igazhalmaz igazságértékelés fával



Példa – igazhalmaz igazságértékelés fával

$$\varphi(X \supset Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{i}}$$

(implikációs)

$$\varphi X^{\mathbf{h}} \qquad \varphi(Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{i}}$$

(diszjunkciós)

$$\varphi(Y \wedge Z)^{\mathbf{i}} \qquad \varphi\neg X^{\mathbf{i}}$$

(konjukciós) (negációs)

$$\varphi Y^{\mathbf{i}} \qquad \varphi X^{\mathbf{h}}$$

$$\varphi Z^{\mathbf{i}}$$

1.ág			2.ág			3.ág		
X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
h	$\sim$	$\sim$	$\sim$	i	i	h	$\sim$	$\sim$

Példa – igazhalmaz igazságértékelés fával

$\varphi(X \supset Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{i}}$

(implikációs)

$\color{red}{\varphi X^{\mathbf{h}}}$ $\qquad$ $\varphi(Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{i}}$

(diszjunkciós)

$\varphi(Y \wedge Z)^{\mathbf{i}}$ $\qquad$ $\varphi \neg X^{\mathbf{i}}$

(konjukciós) $\qquad$ (negációs)

$\color{red}{\varphi Y^{\mathbf{i}}}$ $\qquad$ $\color{red}{\varphi X^{\mathbf{h}}}$

$\color{red}{\varphi Z^{\mathbf{i}}}$

1.ág			2.ág			3.ág		
X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
h	$\sim$	$\sim$	$\sim$	i	i	h	$\sim$	$\sim$

Az igazhalmaz:

X	Y	Z
i	i	i
h	i	i
h	i	h
h	h	i
h	h	h

Példa – hamishalmaz igazságértékelés fával

A hamishalmazt az igazhalmazban nem szereplő interpretációk alkotják.

A **hamishalmaz**t a formula hamissá válás feltételeinek megkeresésével rekurzív módon is megkapjuk.

Példa – hamishalmaz igazságértékelés fával

A hamishalmazt az igazhalmazban nem szereplő interpretációk alkotják.

A **hamishalmaz**t a formula hamissá válás feltételeinek megkeresésével rekurzív módon is megkapjuk.

$$\varphi(X \supset Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{h}} \text{ (}\neg\text{implikációs)}$$

$$\varphi X^{\mathbf{i}}$$

$$\varphi(Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{h}} \text{ (}\neg\text{diszjunkciós)}$$

$$\varphi(\neg X)^{\mathbf{h}}$$

$$\varphi(Y \wedge Z)^{\mathbf{h}}$$

$$\varphi X^{\mathbf{i}}$$

$$\varphi Y^{\mathbf{h}} \qquad \varphi Z^{\mathbf{h}}$$

Példa – hamishalmaz igazságértékelés fával

A hamishalmazt az igazhalmazban nem szereplő interpretációk alkotják.

A **hamishalmaz**t a formula hamissá válás feltételeinek megkeresésével rekurzív módon is megkapjuk.

$\varphi(X \supset Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{h}}$ (¬implikációs)

$\varphi X^{\mathbf{i}}$

$\varphi(Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{h}}$ (¬diszjunkciós)

$\varphi(\neg X)^{\mathbf{h}}$

$\varphi(Y \wedge Z)^{\mathbf{h}}$

$\varphi X^{\mathbf{i}}$

$\varphi Y^{\mathbf{h}}$ $\quad$ $\varphi Z^{\mathbf{h}}$

1.ág			2.ág		
X	Y	Z	X	Y	Z
i	h	$\sim$	i	$\sim$	h

Példa – hamishalmaz igazságértékelés fával

A hamishalmazt az igazhalmazban nem szereplő interpretációk alkotják.

A **hamishalmaz**t a formula hamissá válás feltételeinek megkeresésével rekurzív módon is megkapjuk.

$\varphi(X \supset Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{h}}$ (¬implikációs)

$\varphi X^{\mathbf{i}}$

$\varphi(Y \wedge Z \vee \neg X)^{\mathbf{h}}$ (¬diszjunkciós)

$\varphi(\neg X)^{\mathbf{h}}$

$\varphi(Y \wedge Z)^{\mathbf{h}}$

$\varphi X^{\mathbf{i}}$

$\varphi Y^{\mathbf{h}}$ $\quad$ $\varphi Z^{\mathbf{h}}$

1.ág			2.ág		
X	Y	Z	X	Y	Z
i	h	$\sim$	i	$\sim$	h

A hamishalmaz:

X	Y	Z
i	i	h
i	h	i
i	h	h

Tartalom

Formulák szemantikus tulajdonságai

Interpretáció kielégít egy formulát

Az ítéletlogikában egy $\mathcal{I}$ **interpretáció kielégít egy** B **formulát** ($\mathcal{I} \models_0 B$). ha a formula helyettesítési értéke i az $\mathcal{I}$ interpretációban. A formulát kielégítő $\mathcal{I}$ interpretációt a formula modelljének is szokás nevezni.

Kielégíthetőség/kielégíthetetlenség/tautológia formulákra (Tk.4.3.1.)

Egy B formula **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.

Egy B formula **kielégíthetetlen**, ha egyetlen interpretáció sem elégíti ki.

Egy B formula **tautológia** ($\models_0 B$), ha minden interpretáció kielégíti. A tautologiát **ítéletlogikai törvény**nek is nevezik.

Példák

Példák ítéletlogikai törvényekre (Tk 71.o és 74.o)

$\models_0 A \supset (B \supset A)$
$\models_0 (A \supset B \supset C) \supset (A \supset B) \supset A \supset C$
$\models_0 A \supset B \supset (A \wedge B)$
$\models_0 ((A \supset B) \supset A) \supset A$

Formulahalmazok szemantikus tulajdonságai

Legyen $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ formulahalmaz.

Interpretáció kielégít egy formulahalmazt

Az ítéletlogikában egy $\mathcal{I}$ interpretáció **kielégít** egy F formulahalmazt ($\mathcal{I} \models_0 \mathcal{F}$), ha a formulahalmaz minden formulájának helyettesítési értéke i az $\mathcal{I}$ interpretációban.

Kielégíthetőség/kielégíthetetlenség formulahalmazokra (Tk.4.3.12.)

Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthető**, ha legalább egy interpretáció kielégíti.

Egy $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthetetlen**, ha bármely interpretációban legalább egy formulája h (nincs olyan interpretáció, ami kielégítené).

Tartalom

Szemantikus következményfogalom

Szemantikus következmény (Tk.4.4.1.)

Egy G formula **szemantikus** vagy **tautologikus következménye** az $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ formulahalmaznak, ha minden olyan $\mathcal{I}$ interpretációra, amelyre $\mathcal{I} \models_0 \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ fennáll, $\mathcal{I} \models_0 G$ is fennáll (ha $\mathcal{I}$ modellje $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$-nek, akkor modellje G-nek is).
Jelölés: $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models_0 G$

Tétel

Ha egy G formula bármely $\mathcal{F}$ feltételhalmaznak következménye, akkor G tautológia ($\models_0 G$).

Tehát (F, G) akkor helyes következtetésforma, ha teljesül, hogy $F \models_0 G$ és létezik olyan $\mathcal{I}$ interpretáció, melyre $\mathcal{I} \models_0 F$.

Szemantikus következményfogalom

Tétel (Tk.4.4.3.)

Ha $\mathcal{F}$-nek következménye G_1 ($\mathcal{F} \models_0 G_1$) és
$\mathcal{F}$-nek következménye G_2 ($\mathcal{F} \models_0 G_2$) valamint
$\{G_1, G_2\}$-nek következménye A ($\{G_1, G_2\} \models_0 A$),
akkor $\mathcal{F}$-nek következménye A ($\mathcal{F} \models_0 A$).

Szemantikus következményfogalom

Eldöntésprobléma

Eldöntésproblémának nevezik a logikában annak eldöntését, hogy egy (F, G) pár a szemantikus következményfogalom szerint helyes gondolkodásforma-e.

Tétel (Tk.4.4.4.)

$\mathcal{F}$-nek akkor és csak akkor következménye G, ha az $\mathcal{F} \cup \neg G$ vagy $F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg G$ kielégíthetetlen.

Ennek alapján az egyik **szemantikus eldöntésprobléma**: tetszőleges ítéletlogikai formuláról eldönteni, hogy kielégíthetetlen-e.

Szemantikus következményfogalom

Tétel (dedukciós) (Tk.4.4.7.)

$\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models_0 G$ akkor és csak akkor, ha
$\{F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}\} \models_0 (F_n \supset G)$

Tétel (eldöntésprobléma) (Tk.4.4.8.)

$\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models_0 G$ akkor és csak akkor, ha
$\models_0 F_1 \supset (F_2 \supset \ldots (F_{n-1} \supset (F_n \supset G)) \ldots)$

Ennek alapján a másik **szemantikus eldöntésprobléma**:
tetszőleges ítéletlogikai formuláról eldönteni, hogy tautológia-e.

Tautologikusan ekvivalens

Definíció 1. változat (Tk.4.3.7.)

Két vagy több formula igazságtáblája lehet azonos, ekkor azt mondjuk, hogy a formulák **tautologikusan ekvivalensek**. Ennek jelölésére a $\sim_0$ szimbólumot használjuk.

Definíció 2. változat

Az A és B formulák **tautologikusan ekvivalensek**,
ha $A \models_0 B$ és $B \models_0 A$.

Ekkor $\models_0 (A \supset B) \wedge (B \supset A)$.

Példák

Példák átalakítási szabályokra

$X \supset Y \sim_0 \neg X \vee Y$

$\neg\neg X \sim_0 X$

De Morgan szabályok:

1. $\neg(X \wedge Y) \sim_0 \neg X \vee \neg Y$
2. $\neg(X \vee Y) \sim_0 \neg X \wedge \neg Y$

Egyszerűsítési szabályok:

1. $(X \vee d) \wedge (\neg X \vee d) \sim_0 d$
2. $(X \wedge k) \vee (\neg X \wedge k) \sim_0 k$

   ahol d elemi diszjunkció és k elemi konjunkció.

Következtetési módok I.

Definíció (Tk.4.4.14.)

Legyen a $\mathcal{F}$ feltételhalmazban szereplő változók száma n. Ekkor a **legszűkebb következmény** az az $\{i, h\}^n \to \{i, h\}$ leképezés, amely pontosan azokhoz az interpretációkhoz rendel i értéket, amelyek kielégítik az $\mathcal{F}$-et.

Előrekövetkeztetés

Ismert az $\mathcal{F}$ feltételhalmaz, és keressük $\mathcal{F}$ lehetséges következményeit. Megkeressük $\mathcal{F}$ legszűkebb következményét, R-t. Következmény minden olyan G formula, amelyre $R \supset G$ tautológia, azaz R igazhalmaza része G igazhalmazának.

Előrekövetkeztetés – példa

$\mathcal{F} = \{Z \supset M \vee P, Z, \neg P\}$

P	M	Z	$Z \supset M \vee P$	Z	$\neg P$	Iszk.	köv.
i	i	i	i	i	h	h	h/i
i	i	h	i	h	h	h	h/i
i	h	i	i	i	h	h	h/i
i	h	h	i	h	h	h	h/i
h	i	i	i	i	i	i	i
h	i	h	i	h	i	h	h/i
h	h	i	h	i	i	h	h/i
h	h	h	i	h	i	h	h/i

Csak egy igazságértékre kielégíthető a feltételhalmaz.

Következtetési módok II.

Visszakövetkeztetés

Az $\mathcal{F}$ feltételhalmaz és a B következményformula ismeretében eldöntjük, hogy B valóban következménye-e $\mathcal{F}$-nek. Mivel $\mathcal{F} \models_0 B$ pontosan akkor, ha az $\mathcal{F} \cup \{\neg B\}$ formulahalmaz kielégíthetetlen.

Más szóval B pontosan akkor következménye $\mathcal{F}$-nek, ha minden olyan interpretációban, ahol B hamis, az $\mathcal{F}$ kielégíthetetlen.

Példa

Legyen $\mathcal{F} = \{Z \supset M \vee P, Z, \neg P\}$ és lássuk be, hogy M következmény. Be kell látni, hogy, ha $\neg M$ igaz egy interpretációban, akkor $\mathcal{F}$ nem lesz kielégíthető. Ahhoz,hogy minden feltételformula i legyen $Z = i$, $P = h$ mellett $Z \supset M \vee P$-nek igaznak kellene lennie, viszont ha M hamis, akkor $Z \supset M \vee P = h$ lehet csak. Tehát M következménye F-nek.

Tartalom

Formalizálás az ítéletlogikában [1]

Tegyük fel, hogy adott valamilyen köznapi vagy matematikai probléma. Ennek természetes nyelvű egyszerű vagy összetett kijelentő mondatokkal való leírását ismerjük.

Az **egyszerű kijelentő mondatok** formalizálására bevezetünk egy **azonosítót (állításjel, ítéletváltozó)**.

Az **összetett mondatot** analizáljuk, átalakítjuk azonos értelmű, de egyszerű kijelentő mondatokból olyan nyelvtani összekötőkkel felírt mondattá, ahol **a nyelvtani összekötők egyben logikai összekötők** (logikai műveletek).

[1] Tk.54-55.o.

Példa Tk. 54.o

Betörtek egy áruházba. A nyomozási jegyzőkönyv a következőket tartalmazza:
Ha férfi a tettes, akkor kistermetű.
Ha kistermetű, akkor az ablakon mászott be.
A tettes férfi vagy legalábbis férfiruhát hordott.
Ha férfiruhát hordott és feltéve, hogy a szemtanú vallomása hiteles akkor az ablakon mászott be.
A helyszíni szemle megállapította, hogy az ablakon senki sem mászott be.
A nyomozók azt sejtik, hogy a tettes nem férfi.

Példa Tk. 54.o

Betörtek egy áruházba. A nyomozási jegyzőkönyv a következőket tartalmazza:
Ha férfi a tettes (F), akkor kistermetű (K). $F \supset K$
Ha kistermetű, akkor az ablakon mászott be (A). $K \supset A$
A tettes férfi vagy legalábbis férfiruhát hordott (R). $F \vee R$
Ha férfiruhát hordott és feltéve, hogy a szemtanú vallomása hiteles (H), akkor az ablakon mászott be. $(R \wedge H) \supset A$
A helyszíni szemle megállapította, hogy az ablakon senki sem mászott be. $\neg A$
A nyomozók azt sejtik, hogy a tettes nem férfi. $\neg F$

A feltételhalmaz: $\{F \supset K,\ K \supset A,\ F \vee R,\ (R \wedge H) \supset A,\ \neg A\}$
A feltételezés szerinti következmény: $\neg F$

Példa Tk. 54.o

Előrekövetkeztetés:

Az $\{F \supset K,\ K \supset A,\ F \vee R,\ (R \wedge H) \supset A,\ \neg A\}$ formulahalmazt egyetlen interpretáció elégíti ki:
$A = h,\ F = h,\ K = h,\ R = i,\ H = h$, azaz a legszűkebb következényt leíró formula: $\neg A \wedge \neg F \wedge \neg K \wedge R \wedge \neg H$
$(\neg A \wedge \neg F \wedge \neg K \wedge R \wedge \neg H) \supset \neg F$ tautológia, így $\neg F$ következmény.

Visszakövetkeztetés:

$\neg F$ következmény, mivel a negáltját hozzávéve a feltételhalmazhoz, a kapott formulahalmaz:
$\{F \supset K,\ K \supset A,\ F \vee R,\ (R \wedge H) \supset A,\ \neg A,\ F\}$ kielégíthetetlen.