Logika és számításelmélet

I. rész
Logika
Harmadik előadás

Tartalom

Nulladrendű állítás

Az ítéletlogikában nem foglalkoztunk az állítások minősítésével és az állítások leírásával. Az állítás definíciója szerint az állítást egy kijelentő mondattal ki lehet fejezni.

Ha a kijelentő mondat *alanya valamely konkrét dolog*, akkor az állítást **nulladrendű állítás**nak hívjuk. Az ilyen állítások formális leírására egy relációt (logikai függvényt) definiálunk.

Példák

- $E(x) = i$, ha x egész szám
- $P(x) = i$, ha x prímszám
- $L(x, y, z) = i$,ha z az x és az y legnagyobb közös osztója

Az állítás konkrét egyedekkel behelyettesített reláció. Pl.: E(9) vagy L(9,6,3) állítások, de L(9,6,z) nem állítás (paraméteres állítás).

Elsőrendű állítás

Ha a kijelentő mondat *alanya egy halmaz*, akkor az állítást **elsőrendű állítás**nak hívjuk.

Ilyenkor az állítás az összes elemre egyidejűleg fennálló megállapítást/általánosítást vagy a halmaz bizonyos elemeire (nem feltétlenül mindre) fennálló megállapítást/létezést fogalmaz meg.

Leírásukhoz a kvantorokat ($\forall$,$\exists$) használjuk.

Példa

- $\forall x E(x)$ azt jelenti, hogy a halmaz minden eleme egész szám.
- $\exists x P(x)$ azt jelenti, hogy a halmazban van olyan elem, ami prímszám.

Matematikai struktúra

Az 1800-as évek végén és az 1900-as évek elején a matematikai struktúrák (halmazelmélet és az aritmetika – számelmélet) logikai vizsgálatához meg kellett teremteni mind a nulladrendű, mind az elsőrendű állítások leírására szolgáló eszközöket. Szükségessé vált a matematikai struktúrákat leíró nyelv definiálása.

Matematikai struktúra

Definíció

A matematikai struktúra egy $\langle U, R, M, K \rangle$ halmaznégyes, ahol

- U: nem üres halmaz, a struktúra értelmezési tartománya (amennyiben U egyfajtájú elemekből áll)
- R: az U-n értelmezett n-változós ($n = 1, 2, \ldots, k$) logikai függvények (**alaprelációk**) halmaza
- M: az U-n értelmezett n-változós ($n = 1, 2, \ldots, k$) matematikai függvények (**alapműveletek**) halmaza
- K: az U megjelölt elemeinek egy (esetleg üres) részhalmaza

A **struktúra szignatúrája** (ν_1, ν_2, ν_3 egészértékű fgv.együttes) megadja az alaprelációk és az alapműveletek aritását, valamint K elemszámát.

Matematikai struktúra leíró nyelve

Adott matematikai struktúra leíró nyelv ábécéjének logikán kívüli része áll:

- az R halmazbeli alaprelációk *nevei*ből
- az M halmazbeli alapműveletek *nevei*ből
- a K halmazbeli elemek *nevei*ből

Ezekkel a nevekkel már lehet egyszerű (nulladrendű és paraméteres) állításokat leírni. Az R, M, K-beli nevek a leíró nyelv **logikán kívüli** részét képezik.

Matematikai struktúra leíró nyelve

Az összetett állítások és az elsőrendű állítások leírására kibővítjük az ábécét a **logikai szimbólumok**kal (az ábécé logikai része):

- individuumváltozók
- unér és binér logikai műveleti jelek $\neg, \wedge, \vee, \supset$
- kvantorok $\forall, \exists$
- elválasztójelek ( ) ,

Ez együtt egy adott matematikai struktúra logikai leíró nyelvének az ábécéje.

Példa – elemi aritmetika [1]

$\langle \mathbb{N}_0; =; s, +, *; 0 \rangle$ együttes, ahol

- $x, y, \ldots$: individuumvátozók befutják a természetes számok halmazát ($\mathbb{N}_0$-t)
- $=$: az $\{(x, x)\}$ igazhalmazú alapreláció neve
- s: az egyváltozós rákövetkezés függvény neve
- $+$ és $*$: rendre az összeadás és a szorzás műveletek nevei
- 0: a megjelölt univerzumelem neve (az az elem, amely nem tartozik a rákövetkezés függvény értékkészletébe)

[1] Tk.36-37.o.

Példa – elemi aritmetika

A **struktúra szignatúrája** alatt az alaprelációk és az alapműveletek aritásait, valamint a konstansok számát megadó ν_1, ν_2, ν_3 egész értékű függvényeket értjük.

Esetünkben: $\nu_1(=) = 2$, $\nu_2(s) = 1$, $\nu_2(+) = 2$, $\nu_2(*) = 2$, $\nu_3 = 1$

Felsorolással megadva:

$=$	s	$+$	$*$	0
2	1	2	2	1

Az elemi aritmetika leíró nyelvének ábécéjében az $\mathbb{N}_0$ kezelésére a **változók** $(x, y, \ldots)$ szolgálnak (individuumváltozók), az $\{=, s, +, *; 0\}$ jelek a megfelelő **leképezések azonosítói**. A leíró nyelv szignatúrája ugyanaz, mint a struktúráé.

Példa – elemi aritmetika

Az alaprelációkkal (itt az $=$ relációval) lehet állításokat leírni, pl. $2 = 3$, $5 = 5$. De nem állítás pl. $y = 5$ vagy $z = w$ (paraméteres állítások). Egyéb ismert egyszerű állításokat pl. a kisebb egyenlő relációt ezen a nyelven csak összetett állítás formájában lehet felírni (formalizálni). Ehhez a nyelv ábécéjét logikai résszel bővítjük ki. Ezek:

- individuumváltozók: $x, y, \ldots$
- logikai összekötőjelek: $\neg, \wedge, \vee, \supset$
- kvantorok: $\forall, \exists$
- elválasztójelek: $($ $)$ $,$

Példa – aritmetika, geometria

Definiáljuk (formalizáljuk) az aritmetika logikai leíró nyelvén a $\leq$ relációt:

$x \leq y$

$x \leq y =_{def} \exists z((x + z) = y)$

Megjegyzés: Az aritmetika univerzuma *egyfajtájú* elemekből, a természetes számokból állt. Egy matematikai struktúra univerzuma *többfajtájú* elemekből is állhat. Például a térgeometriában pontok, egyenesek és síkok alkotják az értelmezési tartományt. Ekkor a leíró nyelv ábécéjében a fajták elnevezésére is bevezetünk jeleket. Esetünkben ezek a nevek: p, e, s. Így az értelmezési tartomány $U_p \cup U_e \cup U_s$ lesz, a struktúra pedig az $\langle U_p \cup U_e \cup U_s, R, M, K\rangle$ együttes.

Az elsőrendű logika leíró nyelve ($\mathcal{L}$) – követelmények

Olyan ábécével kell hogy rendelkezzen, melynek a logikán kívüli szimbólumai és azok szignatúrája paraméterezéssel bármely adott matematikai struktúra szignatúrájával megfeleltethető kell legyen, és ennélfogva a szimbólumok lehessenek a struktúra relációinak, műveleteinek és megjelölt elemeinek a nevei. Más szóval a nyelv alkalmas kell, hogy legyen tetszőleges szignatúrájú matematikai struktúrák leírására.

Egyfajtájú struktúrákat leíró nyelvek

Egyféle elemből álló U **esetén** az $\langle U, R, M, K\rangle$ struktúra leíró nyelv **logikán kívüli** része lehet a következő.

Az $\mathcal{L}$ nyelv ábécéje: $\langle Pr, Fn, Cnst\rangle$, szignatúrája: (ν_1, ν_2, ν_3).

- Pr: predikátumszimbólumok halamaza
  ν_1: $P \in Pr$-re megadja P aritását (k)
- Fn: függvényszimbólumok halamaza
  ν_2: $f \in Fn$-re megadja f aritását (k)
- $Cnst$: konstansszimbólumok halamaza
  ν_3: megadja a konstansok számát

Többfajtájú struktúrákat leíró nyelvek

Többféle elemből álló U **esetén** az $\langle U, R, M, K\rangle$ struktúra leíró nyelv **logikán kívüli** része lehet a következő.

Az $\mathcal{L}$ nyelv ábécéje: $\langle Srt, Pr, Fn, Cnst\rangle$, szignatúrája: (ν_1, ν_2, ν_3).

- Srt: nemüres halmaz, melynek π_j elemei fajtákat szimbolizálnak
- Pr: predikátumszimbólumok halamaza
  ν_1: $P \in Pr$-re megadja P aritását (k), és hogy milyen fajtájúak az egyes argumentumok $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k)$
- Fn: függvényszimbólumok halamaza
  ν_2: $f \in Fn$-re megadja f aritását (k), és hogy milyen fajtájúak az egyes argumentumok, valamint a függvény értéke $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k; \pi_f)$
- $Cnst$: konstansszimbólumok halamaza
  ν_3: megadja minden fajtához a konstansok számát.

Leíró nyelv – logikai rész

- különböző fajtájú individuumváltozók (minden fajtához megszámlálhatóan végtelen sok): $x, y, y_k, \ldots$
- unér és binér logikai műveleti jelek: $\neg, \wedge, \vee, \supset$
- kvantorok: $\forall, \exists$
- elválasztójelek: ( ) ,

Az $\mathcal{L}$ nyelv ábécéjére $V[V_\nu]$-vel hivatkozunk, ahol V_ν adja meg a (ν_1, ν_2, ν_3) szignatúrájú $\langle Srt, Pr, Fn, Cnst \rangle$ halmaznégyest.

Tartalom

A nyelv kifejezései

A nyelv kifejezései informálisan:

- **termek**: a matematikai leképezéseket szimbolizálják
- **formulák**: a logikai leképezéseket szimbolizálják

Az elsőrendű logika szintaxisa [2] – term I.

Egyfajtájú eset.

Termek – $\mathcal{L}_t(V_\nu)$

1. (alaplépés) Minden individuumváltozó és konstans szimbólum term.
2. (rekurzív lépés) Ha az $f \in Fn$ k-változós függvényszimbólum és $t_1, t_2, \ldots, t_k$ termek, akkor $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ is term.
3. Minden term az 1, 2 szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

[2] Tk.112.o.

Az elsőrendű logika szintaxisa – formula I.

Egyfajtájú eset.

Formulák – $\mathcal{L}_f(V_\nu)$

1. (alaplépés) Ha a $P \in Pr$ k-változós predikátumszimbólum és $t_1, t_2, \ldots, t_k$ termek, akkor $P(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ formula (atomi formula).
2. (rekurzív lépés)
   - Ha A formula, akkor $\neg A$ is az.
   - Ha A és B formulák, akkor $(A \circ B)$ is formula, ahol $\circ$ a három binér művelet bármelyike.
3. Ha A formula, akkor $\forall x A$ és $\exists x A$ is az.
4. Minden formula az 1, 2, 3 szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

Az elsőrendű logika szintaxisa – term II.

Többfajtájú eset.

Termek – $\mathcal{L}_t(V_\nu)$

1. (alaplépés) Minden $\pi \in Srt$ fajtájú individuumváltozó és konstans szimbólum π fajtájú term.
2. (rekurzív lépés) Ha az $f \in Fn$ $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k; \pi_f)$ fajtájú függvényszimbólum és $t_1, t_2, \ldots, t_k$ rendre $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ fajtájú termek, akkor $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ π_f fajtájú term.
3. Minden term az 1, 2 szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

Az elsőrendű logika szintaxisa – formula II.

Többfajtájú eset.

Formulák – $\mathcal{L}_f(V_\nu)$

1. (alaplépés) Ha a $P \in Pr$ $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$ fajtájú predikátumszimbólum és $t_1, t_2, \dots, t_k$ rendre $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ fajtájú termek, akkor $P(t_1, t_2, \dots, t_k)$ formula (atomi formula).
2. (rekurzív lépés)
    - Ha A formula, akkor $\neg A$ is az.
    - Ha A és B formulák, akkor $(A \circ B)$ is formula, ahol $\circ$ a három binér művelet bármelyike.
3. Ha A formula, akkor $\forall x A$ és $\exists x A$ is az.
4. Minden formula az 1, 2, 3 szabályok véges sokszori alkalmazásával áll elő.

Elsőrendű logikai nyelv: $\mathcal{L}(V_\nu) = \mathcal{L}_t(V_\nu) \cup \mathcal{L}_f(V_\nu)$.

Formulaelnevezések

- $\neg A$ negációs
- $A \wedge B$ konjukciós
- $A \vee B$ diszjunkciós
- $A \supset B$ implikációs
- $\forall x A$ univerzálisan kvantált
- $\exists x A$ egzisztenciálisan kvantált

A $\forall x A$és $\exists x A$ formulák esetén az A formula a kvantált formula törzse - mátrixa.

Elsőrendű formulákhoz kapcsolódó fogalmak

Vezessük be a $\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \supset$ prioritási sorrendet, ekkor az ítéletlogikához hasonlóan definiáljuk:

- a zárójelelhagyásokat
- a műveletek és a kvantorok hatáskörét
- a komponens és prímkomponens fogalmakat
- egy formula fő műveleti jelét

Az ítéletlogikában minden formulát fel lehet írni a prímformulák (azaz ítéletváltozók) és a műveletek segítségével. Az elsőrendű nyelvben is vannak ilyen formulák. **Prímformulák**[a] az elsőrendű nyelvben az atomi formulák és a kvantált formulák.

[a] Tk.113.o.

Közvetlen résztérm és részformula

Közvetlen részterm

1. Konstansnak és individuumváltozónak nincs közvetlen résztermje.
2. Az $f(t_1, t_2, \ldots, t_k)$ term közvetlen résztermjei a $t_1, t_2, \ldots, t_k$ termek.

Közvetlen részformula

1. Egy atomi formulának nincs közvetlen részformulája.
2. $\neg A$ közvetlen részformulája az A formula.
3. Az $(A \circ B)$ közvetlen részformulái az A (baloldali) és a B (jobboldali) formulák.
4. A QxA ($Q \in \{\forall, \exists\}$) közvetlen részformulája az A formula.

Prímkomponensek

Egy formulában egy logikai művelet hatáskörében lévő részformulá(ka)t **komponens formuláknak** nevezzük.

1. Egy atomi formulának nincs közvetlen komponense (**prímformula**).
2. $\neg A$ közvetlen komponense az A formula.
3. Az $(A \circ B)$ közvetlen komponensei az A és a B formulák.
4. A QxA ($Q \in \{\forall, \exists\}$) formulának nincs közvetlen komponense (**prímformula**).

Megjegyzés: **prímkomponens**nek nevezzük azokat a prímformulákat, amelyekből a formula kizárólag a $\neg, \wedge, \vee, \supset$ műveletek segítségével épül fel.

Ennek megfelelően a **prímformulák**:

1. Egy atomi formula prímformula.
2. Egy QxA formula prímformula.

Szerkezeti fák [3]

Term szerkezeti fája.

Egy t term szerkezeti fája egy olyan véges fa, melyre teljesül, hogy

- a gyökeréhez a t term van rendelve,
- ha valamelyik csúcsához egy t' term van rendelve, akkor az adott csúcs gyerekeihez a t' term közvetlen résztermjei vannak rendelve,
- leveleihez individuumváltozók vagy konstansok vannak rendelve.

[3] Tk. 116-118.o.

Szerkezeti fák

Formula szerkezeti fája.

Egy F formula szerkezeti egy olyan véges fa, melyre teljesül, hogy

- a gyökeréhez az F formula van rendelve,
- ha valamelyik csúcsához egy F' formula van rendelve, akkor az adott csúcs gyerekeihez az F' formula közvetlen részformulái vannak rendelve,
- leveleihez atomi formulák vannak rendelve.

Logikai összetettség

Egy A formula **logikai összetettsége**: $\ell(A)$

Szerkezeti rekurzió szerinti definíció (Tk.5.1.15)

1. Ha A atomi formula, akkor $\ell(A) = 0$
2. $\ell(\neg A) = \ell(A) + 1$
3. $\ell(A \circ B) = \ell(A) + \ell(B) + 1$
4. $\ell(QxA) = \ell(A) + 1$

Szabad és kötött változók elsőrendű formulákban

Egy formulában egy x változó egy előfordulása

- **szabad**, ha nem esik x-re vonatkozó kvantor hatáskörébe
- **kötött**, ha x-re vonatkozó kvantor hatáskörébe esik

Egy x változó egy formulában

- **kötött változó**, ha x minden előfordulása kötött
- **szabad változó**, ha x minden előfordulása szabad
- **vegyes változó**, ha x-nek van szabad és kötött előfordulása is

Megjegyzés: Ha egy formulában egy változó kötött, akkor átnevezve ezt a változót a formulában elő nem forduló változónévvel a formula ekvivalens marad az eredetivel. Ily módon minden formula átírható változóátnevezésekkel *vegyes változót* már *nem tartalmazó formulává*.

Szabad és kötött változók – példa

Szabad és kötött változók

A formula: $\forall x P(x) \supset \exists y Q(w, y) \vee P(v) \supset \forall z Q(w, z)$

A prímkomponensek: $\forall x P(x)$, $\exists y Q(w, y)$, $P(v)$, $\forall z Q(w, z)$

A szabad individuumváltozók: v, w

Formulák szintaktikus tulajdonságai

Zártság

- **Egy formula zárt**, ha minden változója kötött.
- **Egy formula nyitott**, ha legalább egy individuumváltozónak van legalább egy szabad előfordulása.
- **Egy formula kvantormentes**, ha nem tartalmaz kvantort.

1. rendű állításokat szimbolizálnak az $\mathcal{L}$ nyelven a zárt formulák vagy **mondatok**.

Alapkifejezés, alapatom, alapterm, ...

Alapkifejezés

Alapkifejezés a változót nem tartalmazó $\mathcal{L}$ kifejezés (alapformula, alapterm). Ezeket alappéldányoknak is nevezik. Az atomi formulák alappéldányait két csoportba soroljuk:

1. Egy atomi formula **alapatom**, ha argumentumai konstans szimbólumok vagy egy megadott univerzum elemei (pl. $P(c)$)
2. Egy atomi formulát **az atomi formula alappéldányának** nevezzük, ha argumentumai **alaptermek** (pl. $Q(f(a,b),a)$)

Megjegyzés: Egy atomi formulát (nem alappéldány) egyébként paraméteres állításnak is neveznek.