Logika és számításelmélet

I. rész
Logika
Negyedik előadás

Tartalom

Elsőrendű logikai nyelv interpretációja

Egy elsőrendű logikai nyelv $\mathcal{L}[V_\nu]$ interpretációja egy, az $\mathcal{L}$ nyelvvel azonos szignatúrájú $\langle U, R, M, K\rangle$ matematikai struktúra.

Másik megfogalmazás: egy, a szignatúrának megfelelő U halmaz megadása, ezen a Pr, Fn, $Cnst$ szimbólumhalmazok szignatúrájával megegyező R, M, K reláció-, művelet- és konstanshalmaz definiálása.

Az $\mathcal{I}$ interpretáció működése: $\mathcal{I} = \langle \mathcal{I}_{Srt}, \mathcal{I}_{Pr}, \mathcal{I}_{Fn}, \mathcal{I}_{Cnst}\rangle$ függvénynégyes, ahol:

- $\mathcal{I}_{Srt} : \pi \mapsto \mathcal{U}_\pi$, ahol ha Srt egyelemű, akkor az interpretáció U univerzuma egyfajtájú elemekből áll
- az $\mathcal{I}_{Pr} : P \mapsto P^{\mathcal{I}}$, ahol $P^{\mathcal{I}}$ a struktúra R halmaza
- az $\mathcal{I}_{Fn} : f \mapsto f^{\mathcal{I}}$, ahol $f^{\mathcal{I}}$ a struktúra M halmaza
- az $\mathcal{I}_{Cnst} : c \mapsto c^{\mathcal{I}}$, ahol $c^{\mathcal{I}}$ a struktúra K halmaza

Változókiértékelés

Változókiértékelés

Egy $\kappa\colon V \to \mathcal{U}$ leképezés, ahol V a nyelv változóinak halmaza, U pedig az interpretáció univerzuma.

$|x|^{\mathcal{I},\kappa}$ az U univerzumbeli $\kappa(x)$ elem.

Formula jelentése – informális definíció

Legyen egy formula valamely $\mathcal{L}(P_1, P_2, \ldots, P_n; f_1, f_2, \ldots, f_k)$ formalizált nyelven, ahol $(r_1, r_2, \ldots, r_n; s_1, s_2, \ldots, s_k)$ az $\mathcal{L}$ nyelv, típusa/szignatúrája (ν_1, ν_2, ν_3).

1.lépés Választunk egy $S = U(R_1, R_2, \ldots, R_n; o_1, o_2, \ldots, o_k)$ matematikai struktúrát, amelynek a típusa/szignatúrája $(r_1, r_2, \ldots, r_n; s_1, s_2, \ldots, s_k)/(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ megegyezik a nyelvével és a logikán kívüli szimbólumokat a megfelelő relációknak illetve műveleteknek feleltetjük meg: $P_i = P_i^{\mathcal{I}}$, $f_k = f_k^{\mathcal{I}}$ (ha az interpretáló struktúrának nincs leíró nyelve, vagy nem akarjuk azt használni. Ha felhasználjuk az interpretáló struktúra leíró nyelvét, akkor $P_i^{\mathcal{I}} = R_i$ neve és $f_k^{\mathcal{I}} = o_k$ neve. Ez a nyelv szimbólumainak interpretációja, ahol R_i és o_k jelentése egyértelmű).

2.lépés A nem kötött individuumváltozók kiértékelése $(|x|^{\mathcal{I},\kappa})$ és a kifejezések helyettesítési értékeinek kiszámítása.

Formális definíció: termek szematikája

Termek szemantikája

1. ha c konstansszimbólum, $|c|^{\mathcal{I},\kappa}$ az U-beli $c^{\mathcal{I}}$ elem
2. ha x individuumváltozó, $|x|^{\mathcal{I},\kappa}$ a $\kappa(x) \in U$ elem
   (ahol κ egy változókiértékelés)
3. $|f(t_1, t_2, \ldots, t_n)|^{\mathcal{I},\kappa} = f^{\mathcal{I}}((|t_1|^{\mathcal{I},\kappa}, |t_2|^{\mathcal{I},\kappa}, \ldots, |t_n|^{\mathcal{I},\kappa}))$

Formális definíció: formulák szemantikája

Formulák szemantikája

1. $|P(t_1, t_2, \ldots, t_n)|^{\mathcal{I},\kappa} = i$, ha $(|t_1|^{\mathcal{I},\kappa}, |t_2|^{\mathcal{I},\kappa}, \ldots, |t_n|^{\mathcal{I},\kappa}) \in P^{\mathcal{I}}$, ahol a $P^{\mathcal{I}}$ jelöli a $P^{\mathcal{I}}$ reláció igazhalmazát.
2. $|\neg A|^{\mathcal{I},\kappa} = \neg|A|^{\mathcal{I},\kappa}$
   $|A \wedge B|^{\mathcal{I},\kappa} = |A|^{\mathcal{I},\kappa} \wedge |B|^{\mathcal{I},\kappa}$
   $|A \vee B|^{\mathcal{I},\kappa} = |A|^{\mathcal{I},\kappa} \vee |B|^{\mathcal{I},\kappa}$
   $|A \supset B|^{\mathcal{I},\kappa} = |A|^{\mathcal{I},\kappa} \supset |B|^{\mathcal{I},\kappa}$
3. $|\forall x A|^{\mathcal{I},\kappa} = i, ha|A|^{\mathcal{I},\kappa^*} = i$ κ minden κ^* x variánsára
   $|\exists x A|^{\mathcal{I},\kappa} = i, ha|A|^{\mathcal{I},\kappa^*} = i$ κ legalább egy κ^* x variánsára

A továbbiakban egyfajtájú struktúrákkal és egyfajtájú $\mathcal{L}$ nyelvvel (Srt egyelemű halmaz) foglalkozunk az elsőrendű logika tárgyalása során.

Formulakifejtés – példa

$\forall x P(x,y)$ formula kifejtése

$U = \{a, b, c\}$, formulakifejtés $\kappa(y) = a, b, c$-re:

- $\kappa(y) = a$
  $|\forall x P(x,y)|^{\mathcal{I},\kappa} = |\forall x P(x,a)|^{\mathcal{I}} = P^{\mathcal{I}}(a,a) \wedge P^{\mathcal{I}}(b,a) \wedge P^{\mathcal{I}}(c,a)$
- $\kappa(y) = b$
  $|\forall x P(x,y)|^{\mathcal{I},\kappa} = |\forall x P(x,b)|^{\mathcal{I}} = P^{\mathcal{I}}(a,b) \wedge P^{\mathcal{I}}(b,b) \wedge P^{\mathcal{I}}(c,b)$
- $\kappa(y) = c$
  $|\forall x P(x,y)|^{\mathcal{I},\kappa} = |\forall x P(x,c)|^{\mathcal{I}} = P^{\mathcal{I}}(a,c) \wedge P^{\mathcal{I}}(b,c) \wedge P^{\mathcal{I}}(c,c)$

Formulakifejtés – példa

$\forall x \exists y (P(x,y) \supset R(x,y))$ formula kifejtése

$U = \{a, b, c\}$

$|\forall x \exists y (P(x,y) \supset R(x,y))|^{\mathcal{I}}$

$=$

$|\exists y (P(a,y) \supset R(a,y))|^{\mathcal{I}} \wedge$
$|\exists y (P(b,y) \supset R(b,y))|^{\mathcal{I}} \wedge$
$|\exists y (P(c,y) \supset R(c,y))|^{\mathcal{I}}$

$=$

$\big((P^{\mathcal{I}}(a,a) \supset R^{\mathcal{I}}(a,a)) \vee (P^{\mathcal{I}}(a,b) \supset R^{\mathcal{I}}(a,b)) \vee (P^{\mathcal{I}}(a,c) \supset R^{\mathcal{I}}(a,c))\big) \wedge$
$\big((P^{\mathcal{I}}(b,a) \supset R^{\mathcal{I}}(b,a)) \vee (P^{\mathcal{I}}(b,b) \supset R^{\mathcal{I}}(b,b)) \vee (P^{\mathcal{I}}(b,c) \supset R^{\mathcal{I}}(b,c))\big) \wedge$
$\big((P^{\mathcal{I}}(c,a) \supset R^{\mathcal{I}}(c,a)) \vee (P^{\mathcal{I}}(c,b) \supset R^{\mathcal{I}}(c,b)) \vee (P^{\mathcal{I}}(c,c) \supset R^{\mathcal{I}}(c,c))\big) \wedge$

Komplett példa I.

- $\mathcal{L}$ nyelv:
  $\mathcal{L} = (=, P_1, P_2; a, b, f_1, f_2)$
  szignatúra: $(2, 2, 2; 0, 0, 2, 2)$
- A struktúra leíró nyelve:
  $S = \mathbb{N}(=, <, >; 0, 1, +, *)$
  szigantúra: $(2, 2, 2; 0, 0, 2, 2)$

$\mathcal{I}_{Pr} : P \to P^{\mathcal{I}}$	$=$	P_1	P_2
	$=$	$<$	$>$

$\mathcal{I}_{Fn} : f \to f^{\mathcal{I}}$	a	b	f_1	f_2
	0	1	$+$	$*$

$\mathcal{I}_{Cnst}$: nincs konstans, csak két db 0 változós függvény

Példa II.

Az $t = f_1(x, f_2(x, y))$ *term jelentésének megállapítása*:

$|t|^{\mathcal{I},\kappa} = |f_1(x, f_2(x, y))|^{\mathcal{I},\kappa} =$

$|f_1|^{\mathcal{I}}(|x|^{\mathcal{I},\kappa}, |f_2(x, y)|^{\mathcal{I},\kappa}) =$

$+(x, *(x, y)) =$

$x + x * y$

	x	y	$x + x * y$
κ_1	1	1	2
κ_2	2	3	8
κ_3	0	4	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Példa III.

A $P_1(t, f_1(y, f_2(x, y)))$ *formula jelentésének megállapítása*:

$$|P_1(t, f_1(y, f_2(x, y)))|^{\mathcal{I},\kappa} =$$
$$|P_1|^{\mathcal{I}}(|t|^{\mathcal{I},\kappa}, |f_1|^{\mathcal{I}}(|y|^{\mathcal{I},\kappa}, |f_2|^{\mathcal{I}}(|x|^{\mathcal{I},\kappa}, |y|^{\mathcal{I},\kappa}))) =$$
$$< (+(x, *(x, y)), +(y, *(x, y))) =$$
$$< (x + x * y, y + x * y) =$$
$$(x + x * y) < (y + x * y)$$

Egy kvantormentes formula kiértékelése: a formula minden alap előfordulását generáljuk és így minden állítás előáll $\mathcal{I}$-ben.

x	y	$(x + x * y) < (y + x * y)$
1	1	$(1 + 1 * 1) < (1 + 1 * 1) = h$
2	3	$(2 + 2 * 3) < (3 + 2 * 3) = i$
...	...	...

Példa IV.

Egzisztenciális formula jelentésének megállapítása:

$|\exists x P_1(a, f_1(x,x))|^{\mathcal{I},\kappa} = i$, ha $|P_1(a, f_1(x,x))|^{\mathcal{I},\kappa^*} = i$
κ legalább egy κ^* variánsára.
Azaz ebben az interpretációban, ha $0 < (x + x) = i$
legalább egy $u \in N$ esetén.

Nézzük meg a formula értéktábláját:

x	$0 < (x + x)$
0	h
1	i
$\dots$	$\dots$

Mivel az $x = 1$-re a formula törzse i, ezért a $\exists x(0 < (x + x))$ formula is i.

Példa V.

Univerzális formula jelentésének megállapítása:

$|\forall x P_1(a, f_1(b, x)))|^{\mathcal{I},\kappa} = i$, ha $|P_1(a, f_1(b, x)))|^{\mathcal{I},\kappa^*} = i$
κ minden κ^* x variánsára.

Nézzük meg a formula értéktábláját:

x	$0 < (1 + x)$
0	i
1	i
...	...

Mivel minden egészre a formula törzse i, ezért a $\forall x(0 < (1 + x))$ formula értéke i.

A formula értéktáblája

Egy 1. rendű formula prímformulái az atomi formulák (ezek paraméteres állítások az interpretációkban) és a kvantált formulák (ezek állítások, ha zártak).

Egy 1. rendű formula prímkomponensei a formula azon prímformulái, amelyekből a formula logikai összekötőjelek segítségével épül fel.

Az **igazságtáblában** (ítéletlogika) az első sorba az állításváltozók (ezek a formula prímkomponensei) és a formula kerülnek. A változók alá igazságértékeiket (interpretáció) írjuk. A formula alatt a megfelelő helyettesítési értékek találhatók.

Egy 1. rendű formula **értéktáblájában** az első sorba a formula szabad változói, a prímkomponensek és a formula kerülnek. (Mivel a prímformulák több esetben paraméteres állítások, ezért az interpretációban az individuumváltozók kiértékelése után válnak állításokká.) Az individuumváltozók alá a lehetséges változókiértékelések, a prímformulák alá a megfelelő helyettesítési értékek kerülnek. A formula alatt a formulának a prímformulák értékei alapján kiszámított helyettesítési értékei találhatók.

A formula értéktáblája – példa

A formula: $F = \exists x P(x) \supset \exists y Q(w,y) \vee P(v) \supset \forall z Q(w,z)$

A formula értéktáblája – példa

A formula: $F = \exists x P(x) \supset \exists y Q(w,y) \vee P(v) \supset \forall z Q(w,z)$

- A prímkomponensek: $\exists x P(x)$, $\exists y Q(w,y)$, $P(v)$, $\forall z Q(w,z)$

A formula értéktáblája – példa

A formula: $F = \exists x P(x) \supset \exists y Q(w,y) \vee P(v) \supset \forall z Q(w,z)$

- A prímkomponensek: $\exists x P(x)$, $\exists y Q(w,y)$, $P(v)$, $\forall z Q(w,z)$
- A szabad individuumváltozók: v,w

A formula értéktáblája – példa

A formula: $F = \exists x P(x) \supset \exists y Q(w,y) \vee P(v) \supset \forall z Q(w,z)$

- A prímkomponensek: $\exists x P(x)$, $\exists y Q(w,y)$, $P(v)$, $\forall z Q(w,z)$
- A szabad individuumváltozók: v,w
- Legyen az interpretáló struktúra:
  $U = \{1,2,3\}$, $|P|^{\mathcal{I}} = \{1,3\}$,
  $|Q|^{\mathcal{I}} = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$

A formula értéktáblája – példa

A formula: $F = \exists x P(x) \supset \exists y Q(w, y) \vee P(v) \supset \forall z Q(w, z)$

- A prímkomponensek: $\exists x P(x)$, $\exists y Q(w, y)$, $P(v)$, $\forall z Q(w, z)$
- A szabad individuumváltozók: v,w
- Legyen az interpretáló struktúra:
  $U = \{1, 2, 3\}$, $|P|^{\mathcal{I}} = \{1, 3\}$,
  $|Q|^{\mathcal{I}} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$
- Ekkor $|\exists x P(x))|^{\mathcal{I}} = i$, a többiek paraméteres állítások.

A formula értéktáblája – példa

A formula: $F = \exists x P(x) \supset \exists y Q(w,y) \vee P(v) \supset \forall z Q(w,z)$

- A prímkomponensek: $\exists x P(x)$, $\exists y Q(w,y)$, $P(v)$, $\forall z Q(w,z)$
- A szabad individuumváltozók: v,w
- Legyen az interpretáló struktúra:
  $U = \{1,2,3\}$, $|P|^{\mathcal{I}} = \{1,3\}$,
  $|Q|^{\mathcal{I}} = \{(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$
- Ekkor $|\exists x P(x))|^{\mathcal{I}} = i$, a többiek paraméteres állítások.

Az értéktábla:

v	w	$\lvert\exists x P(x))\rvert^{\mathcal{I}}$	$\lvert\exists y Q(w,y)\rvert^{\mathcal{I}}$	$\lvert P(v)\rvert^{\mathcal{I}}$	$\lvert\forall z Q(w,z)\rvert^{\mathcal{I}}$	F
1	1	i	$\lvert\exists y Q(1,y)\rvert^{\mathcal{I},\kappa} = i$	$\lvert P(1)\rvert^{\mathcal{I}} = i$	$\lvert\forall z Q(1,z)\rvert^{\mathcal{I},\kappa} = h$	h
1	2	i	$\lvert\exists y Q(2,y)\rvert^{\mathcal{I},\kappa} = i$	$\lvert P(1)\rvert^{\mathcal{I}} = i$	$\lvert\forall z Q(2,z)\rvert^{\mathcal{I},\kappa} = i$	i
1	3	i	$\lvert\exists y Q(3,y)\rvert^{\mathcal{I},\kappa} = h$	$\lvert P(1)\rvert^{\mathcal{I}} = i$	$\lvert\forall z Q(3,z)\rvert^{\mathcal{I},\kappa} = h$	h
2	1	i	...	...	...	...
2	2	i	...	...	...	...
2	3	i	...	...	...	...
3	1	i	...	...	...	...
3	2	i	...	...	...	...
3	3	i	...	...	...	...

Tartalom

Formulák és formulahalmazok szemantikus tulajdonságai

$\mathcal{I}, \kappa \models A$

Az $\mathcal{L}$ **egy** $\mathcal{I}$ **interpretációja adott** κ **változókiértékelés mellett kielégít egy 1. rendű** A **formulát** $(\mathcal{I}, \kappa \models A)$, ha a formula $|A|^{\mathcal{I},\kappa}$ értéke i. Ha az A formula mondat (zárt formula) és $\mathcal{I} \models A$, akkor azt mondjuk, hogy az I által megadott S struktúra elégíti ki A-t, így $S \models A$. Más szóval S **modellje** A**-nak**.

$\mathcal{I} \models \mathcal{F}$

Ha $\mathcal{L}$ egy $\mathcal{I}$ interpretációjára az $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ zárt formulahalmazban $|F_k|^{\mathcal{I}}$ értéke i, minden $1 \leq k \leq n$ értékre, akkor $\mathcal{I}$ **kielégíti** $\mathcal{F}$-et. Jelölés: $\mathcal{I} \models \mathcal{F}$.

Formulák és formulahalmazok szemantikus tulajdonságai

Kielégíthető formula

Azt mondjuk, hogy egy G **formula kielégíthető** ha $\mathcal{L}$-hez van legalább egy $\mathcal{I}$ interpretáció és κ változókiértékelés, hogy $\mathcal{I}, \kappa \models G$.

Kielégíthető formulahalmaz

Azt mondjuk, hogy $\mathcal{F}$ **zárt formulahalmaz kielégíthető** ha $\mathcal{L}$-nek legalább egy $\mathcal{I}$ interpretációja kielégíti, azaz $\mathcal{I} \models \mathcal{F}$.

Logikailag igaz és tautológia kérdése

Logikailag igaz

Azt mondjuk, hogy egy G formula **logikailag igaz (logikai törvény)**, ha G igaz minden lehetséges $\mathcal{I}$ interpretációra és minden κ változókiértékelésre. Ez azt jelenti, hogy G igaz minden lehetséges interpretáló struktúrában. Jelölés: $\models G$.

Tautológia

Azt mondjuk, hogy egy G formula **tautológia**, ha G értéktáblájában a prímkomponensekhez rendelhető összes lehetséges igazságérték hozzárendelés esetén a formula helyettesítési értéke i. Jelölés: $\models_0 G$

Példa

$\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) \supset \forall x P(x)$ formula prímkomponens alakja
$p \wedge q \supset p$. ami tautológia, de

$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \supset \forall x P(x)$ prímkomponens alakja
$r \supset p$ nem tautológia (viszont mindkettő logikailag igaz!)

Kielégíthetetlenség

Kielégíthetetlenség

Azt mondjuk, hogy G formula illetve $\mathcal{F}$ formulahalmaz **kielégíthetetlen** (nem kielégíthető), ha $\mathcal{L}$-hez nincs olyan $\mathcal{I}$ interpretáció, hogy $\mathcal{I} \models G$ illetve, hogy $\mathcal{I} \models \mathcal{F}$. Más szóval egy G formula kielégíthetetlen, ha minden interpretációban a G értéktáblájának minden sorában G helyettesítési értéke h(amis). Az $\mathcal{F}$ formulahalmaz kielégíthetetlen, ha az $\mathcal{F}$ közös értéktáblájában minden sorban van legalább egy eleme $\mathcal{F}$-nek, amelynek a helyettesítési értéke h(amis).

A két szemantikus tulajdonság fennállásának vizsgálatához az összes inerpretáló struktúrára szükség van.

Lehetséges interpretáló struktúrák száma adott U és adott szignatúra mellett

Legyenek rendre az $\mathcal{L}$ nyelv szignatúrája szerint $(r_1, r_2, \ldots, r_n; s_1, s_2, \ldots, s_k)$ a predikátumszimbólumok és függvényszimbólumok aritásai. Legyen U az univerzum, ahol $|U| = M$.

Állapítsuk meg hány különböző $(r_1, r_2, \ldots, r_n; s_1, s_2, \ldots, s_k)$ szignatúrájú struktúra létezik U felett?

Ezekkel az aritásokkal relációkat $\prod\limits_{j=1}^{n} 2^{M^{r_j}}$, míg műveleteket $\prod\limits_{t=1}^{k} M^{M^{s_t}}$ féleképp lehet definiálni. Az összes definiálható struktúra száma a kettő szorzata: $(\prod\limits_{j=1}^{n} 2^{M^{r_j}}) * \prod\limits_{t=1}^{k} M^{M^{s_t}}$.

Lehetséges interpretáló struktúrák száma

Alsó becslés esetén csak a lehetséges relációk számát állapítjuk meg. Egy n változós reláció esetén az értelmezési tartomány elemszáma $|U^n| = M^n$, a relációt megadhatjuk az U^n halmaz egy részhalmazának kijelölésével. A lehetséges n-változós relációk száma megegyezik az értelmezési tartomány hatványhalmaza (összes részalmazai halmaza) számosságával $|\mathcal{P}(U^n)|$-el, ez ha U megszámlálhatóan végtelen, akkor kontínuum számosságú (több mint megszámlálhatóan végtelen), ami algoritmikusan nem kezelhető.

Elsőrendű szemantikus fa

Legyenek rendre az $\mathcal{L}$ nyelv szignatúrája szerint $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ a predikátumszimbólumok aritásai.

Előállítjuk minden $j = 1, \ldots, n$ értékre az U^{r_j} értékeinek felhazsnálásával P_{r_j} összes alapatomját, tekintsük ezek egy rögzitett sorrendjét (bázis), a szemantikus fa szintjeihez ebben a sorrendben rendeljük hozzá az alapatomokat. Egy-egy szint minden csúcsából pontosan két él indul ki, az egyik a szinthez rendelt alapatommal (ez jelenti, hogy az alapatom igaz az élhez tartozó interpretációkban), a másik ennek negáltjával van címkézve (ez jelenti, hogy az alapatom hamis az élhez tartozó interpretációkban). A bináris fa ágai adják meg a lehetséges interpretációkat.

Példa

Adott nyelv esetén a predikátumszimbólumokra az összes interpretáció megadása szemantikus fával.

Legyen

- a formulahalmaz:
  $K = \{\forall x P(x), \forall y \forall z(\neg Q(y,z) \vee \neg P(z)), \forall u \forall v Q(u,v)\}$
- $U = \{a, b, c\}$
- a B bázis: $P(a)$, $Q(a,a)$, $P(b)$, $Q(a,b)$, ..., $Q(c,c)$ alapatom sorozat

Példa

A szemantikus fa a B bázis alapján: