Logika és számításelmélet

I. rész
Logika
Ötödik előadás

Tartalom

Következményfogalom az elsőrendű logikában

Formulák logikailag ekvivalens átalakításai

Rezolúciós elv- rezolúciós kalkulus

Következményfogalom az elsőrendű logikában

Logikai vagy szemantikus következmény

Azt mondjuk, hogy a G formula logikai (szemantikus) következménye az $\mathcal{F}$ formulahalmaznak, ha minden olyan $\mathcal{I}$ interpretációra, amelyre $\mathcal{I} \models \mathcal{F}$ teljesül, az $\mathcal{I} \models G$ is fennáll.

Más szóval $\mathcal{F} \models G$ teljesül, ha minden interpretáló struktúrában, az $\mathcal{F}, G$ közös értéktáblájában minden olyan sorban, ahol az $\mathcal{F}$ elemeinek helyettesítési értéke $i$gaz, a G helyettesítési értéke is $i$gaz.

Jelölés: $\mathcal{F} \models G$ vagy $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models G$.

Tétel (logikailag igaz)

Ha egy G formula bármely $\mathcal{F}$ feltételhalmaznak következménye, akkor G **logikailag igaz**.

Következményfogalom – tételek

Az ítéletlogikában bebizonyított tételek itt is igazak.

Tétel

$\mathcal{F}$-nek szemantikus következménye G, akkor és csak akkor, ha az $\mathcal{F} \cup \{\neg G\}$ kielégíthetetlen.

Egyik **eldöntésprobléma**: tetszőleges 1.rendű formulahalmazról eldönteni, hogy kielégíthetetlen-e.

Tétel

Ha $\mathcal{F}$-nek következménye G_1 és $\mathcal{F}$-nek következménye G_2, valamint, $\{G_1, G_2\}$-nek következménye A, akkor az $\mathcal{F}$-nek következménye A.

Következményfogalom – definíciók

A következményfogalom alapján, annak eldöntése, hogy $\mathcal{F} \models G$ *elméletileg* megoldható az interpretáló struktúrákban az $F_1, F_2, \ldots, F_n$ és G-re kapott közös értéktábla alapján.

Legszűkebb következmény

Ha minden interpretáló struktúrában, a G a közös értéktáblának pontosan azokban a soraiban igaz, ahol $F_1, F_2, \ldots, F_n$ mindegyike igaz, akkor G **a legszűkebb következménye $\mathcal{F}$-nek**.

Ekvivalencia

Az A és B elsőrendű formulák **logikailag ekvivalensek**, ha $\{A\} \models B$ és $\{B\} \models A$.

További tételek

Tétel

G elsőrendű formula. Ha $\models_0 G$, akkor $\models G$.
(Ha G tautológia, akkor G logikailag igaz.)

Biz.: Ha $\models_0 G$, akkor G igaz a prímkomponenseinek minden igazságkiértékelésére. Tekintsük a G egy $\mathcal{I}$ interpretációját, az individuumváltozók egy κ kiértékelése mellett. Ekkor a prímkomponensek igazságértéke kiszámolható és bármi is lesz a konkrét értékük, ezután a G helyettesítési értéke i lesz (mivel a prímkomponenseinek minden igazságkiértékelésére igaz).

További tételek

Tétel

Ha $\mathcal{F} \models_0 G$, akkor $\mathcal{F} \models G$.

Biz.: Az $\mathcal{F}$ prímkomponenseinek minden, az $\mathcal{F}$-et kielégítő $\mathcal{I}$ interpretációjára ($\mathcal{I} \models_0 \mathcal{F}$) $\mathcal{I}$ kielégíti G-t is. Ha az $\mathcal{I}$ interpretáció kielégíti $\mathcal{F}$-et, akkor kielégíti G-t is mivel az egyidejűleg a prímkomponensekre vonatkozó igazságkiértékelés is.

Tétel

Ha A és B tautologikusan ekvivalens ($A \sim_0 B$), akkor A és B logikailag ekvivalens ($A \sim B$).

Eldöntésprobléma

Dedukciós tétel

$\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models G \iff \{F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}\} \models F_n \supset G.$

Biz.: ugyanaz, mint ítéletlogikában

Tétel

$\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models G \iff$

$\models F_1 \supset (F_2 \supset (\ldots \supset (F_{n-1} \supset (F_n \supset G))\ldots))$ (logikailag igaz).

Biz.: A dedukciós tétel n-szeres alkalmazásával.

A másik eldöntésprobléma a predikátumlogikában: tetszőleges 1. rendű formuláról el kell tudni dönteni, hogy logikailag igaz-e.

Eldöntésprobléma megoldása szemantikai eszközökkel

Egy n változós ítéletlogikai B formula tautológia, ha

- hamishalmaza üres. Ez azt jelenti, hogy $\neg B$ kielégíthetetlen.
- az ítéletváltozók minden kiértékelésére (minden interpretációban) a helyettesítési érték i.

Elsőrendű n változós B formula logikailag igaz, ha

- minden U univerzumon, a változók minden behelyettesítése mellett kapott B' alapformulák igazak minden, a nyelvnek megfelelő struktúrában.
- $\neg B$ kielégíthetetlen. Egyetlen interpretációban, egyetlen változókiértékelés mellett sem igaz.

Ezek a problémák szemantikailag világosak, de megoldásuk a teljes kipróbálást tételezi fel. Szintaktikai eszközökre van szükség a megoldáshoz.

Szemantikus eldöntésprobléma megoldhatósága

Gödel bebizonyította, hogy **„A szemantikus eldöntésprobléma algoritmikusan nem oldható meg – nem létezik univerzális eldöntési algoritmus"**.

Kutatások **„eldönthető formulaosztályok"** keresésére. Logikailag ekvivalens formulaátalakítások alkalmazása mellett.

Az egyik lehetőség, eldönthető formulaosztályokhoz tartozó formulákkal leírt szemantikus eldöntésproblémára kalkulus (döntési eljárás) keresése (tabló, rezolúciós elv).

A másik lehetőség, a logika szintaktikai alapon való felépítése, szintaktikus eldöntésprobléma megadása és arra kalkulus kidolgozása. (Erre nem térünk ki az előadás keretein belül.)

Tartalom

Következményfogalom az elsőrendű logikában

Formulák logikailag ekvivalens átalakításai

Rezolúciós elv- rezolúciós kalkulus

Eldönthető formulaosztályok

Az ítéletlogika eldönthető formulaosztályai a konjunktív normálforma és a diszjunktív normálforma.

Előkészítő definíciók (Tk. 93-96 és 99-100 o.).

Literál

Egy prímformula (ítéletváltozó) vagy annak negáltja. A literál alapja a benne szereplő prímformula. A literált egységkonjunkciónak vagy egységdiszjunkciónak (egységklóz) is nevezhetünk.

Elemi konjunkció/diszjunkció

Egységkonjunkció/diszjunkció, illetve különböző alapú literálok konjunkciója/diszjunkciója. Az elemi diszjunkciót klóznak is nevezzük.

Teljes elemi konjunkció/diszjunkció

Egy elemi konjunkció/diszjunkció teljes egy adott n változós logikai műveletre nézve, ha mind az n ítéletváltozó alapja valamelyik benne szereplő literálnak.

Előkészítő definíciók (Tk. 93-96 és 99-100 o.).

Konjunktív normálforma (KNF)/ kitüntetett konjunktív normálforma (KKNF)

A KNF elemi diszjunkciók (klózok) konjunkciója. KKNF, ha teljes elemi diszjunkciók konjunkciója.

Diszjunktív normálforma (DNF)/ kitüntetett diszjunktív normálforma (KDNF)

A DNF elemi konjunkciók diszjunkciója. KDNF, ha teljes elemi konjunkciók diszjunkciója.

Egyszerűsítési szabályok (Tk.98.o.)

(1) $(X \vee d) \wedge (\neg X \vee d) = d$ (2) $(X \wedge k) \vee (\neg X \wedge k) = k$

ahol d elemi diszjunkció és k elemi konjukció.

KDNF/KKNF felírása igazságtábla alapján

KDNF felírása a formula igazságtáblája alapján:

- a formula igazhalmazbeli interpretációihoz felírjuk az interpretációban igaz teljes elemi konjunkciót,
- felírjuk a kapott teljes elemi konjunkciókból álló diszjunkciós láncformulát.
- Egyszerűsítéssel előállíthatunk egy DNF-et.

KKNF felírása a formula igazságtáblája alapján:

- a formula hamishalmazbeli interpretációihoz felírjuk az interpretációban hamis teljes elemi diszjunkciót,
- felírjuk a kapott teljes elemi diszjunkciókból álló konjunkciós láncformulát.
- Egyszerűsítéssel előállíthatunk egy KNF-et

Példa

A $(\neg(Z \supset \neg X) \vee Y$ formula igazságtáblája:

X	Y	Z	
i	i	i	$i \quad (X \wedge Y \wedge Z)$
i	i	h	$i \quad (X \wedge Y \wedge \neg Z)$
i	h	i	$i \quad (X \wedge \neg Y \wedge Z)$
i	h	h	$h \quad (\neg X \vee Y \vee Z)$
h	i	i	$i \quad (\neg X \wedge Y \wedge Z)$
h	i	h	$i \quad (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z)$
h	h	i	$h \quad (X \vee Y \vee \neg Z)$
h	h	h	$h \quad (X \vee Y \vee Z)$

KKNF: $(\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee Y \vee Z)$

KNF (egyszerűsítés után): $(Y \vee Z) \wedge (X \vee Y)$

KDNF:
$(X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z)$

Kalkulus

Az előzőek alapján tetszőleges ítéletlogikai formula átírható KNF vagy DNF alakba. Gödel szerint az eldöntésprobléma nem algoritmizálható, de ha egy eldönthető formulaosztályhoz tartozó formulává írjuk át az eldöntésproblémában vizsgált formulát, akkor bár nem algoritmussal hanem egy speciális levezetési eljárással (kalkulussal) sikeres döntésre juthatunk.

Kalkulus

Döntési „algoritmus", levezető eljárás egy olyan algoritmus/lépéssorozat, amely adott input adatokkal dolgozik, azokat a megfelelő szabályok szerint használja fel, a levezetési szabály szerint alakítja át, és akkor áll meg, amikor a **kitűzött célt** (az eljárás megállási feltétele) elérte. A megállással egy kétesélyes döntés egyik kimenetét igazolja. Azonban, ha az algoritmus nem éri el a kitűzött célt, az nem feltétlenül jelenti azt, hogy meghozta a másik eshetőségre a döntést. Egy ilyen eljárást **kalkulusnak** hívunk.

Automatikus tételbizonyító kalkulusok

Az egyik eldöntésprobléma megoldására - egy formula **kielégíthetetlen**ségének eldöntésére **több döntési algoritmus** ismert. Ezekről bebizonyítható, hogy ha a formula felhasználásával az algoritmus eléri a megállási feltételt, akkor a formula kielégíthetetlen (vagyis, ha a formula az $F_1 \wedge F_2 \wedge \cdots \wedge F_n \wedge \neg G$, akkor bebizonyítottuk, hogy $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models_0 G$.)

Azt is mondjuk, hogy az ilyen kalkulusok **automatikus tételbizonyító** kalkulusok.

Tartalom

Következményfogalom az elsőrendű logikában

Formulák logikailag ekvivalens átalakításai

Rezolúciós elv- rezolúciós kalkulus

Kielégíthetetlen KNF formula

Egy KNF alakú formula kielégíthetetlenségének vizsgálata a KNF-ben szereplő klózok S halmaza kielégíthetetlenségének vizsgálatával ekvivalens. Hogyan lehet eldönteni, hogy egy S klózhalmaz kielégíthetetlen? Meg kell mutatni, hogy az S ítéletváltozóinak tetszőleges interpretációjában legalább egy $C \in S$ hamis. Egy C klóz hamis egy interpretációban, ha minden literálja hamis.

Ha az összes interpretációt az S összes ítéletváltozóinak rögzített sorrendje/bázis alapján előálló szemantikus fával adjuk meg, akkor egy C ítéletlogikai klóz abban az interpretációban hamis, amelyikben a klóz mindegyik literáljai ellenkező negáltságú. Az $X \vee Z$ klóz hamis az $\neg XY\neg Z$ és az $\neg X\neg Y\neg Z$ interpretációkban, az interpretáció kiválasztását a klóz szemantikus fára **illesztésének** hívjuk.

Klózok illesztése szemantikus fára (Fogalmak)

Fogalmak

Egy **klóz illesztése** a szemantikus fára az olyan ágak kiválasztása, amelyeken a klóz minden literálja negálva szerepel. Ezekben az interpretációkban ez a klóz hamis.

Cáfoló csúcsnak nevezzük a szemantikus fa azon csúcsát, amelyiket elérve egy klóz (amely azt megelőzően még nem volt hamis) hamissá válik.

Levezető csúcsnak nevezzük a szemantikus fa azon csúcsát, amelyiket követő mindkét csúcs cáfoló csúcs.

A szemantikus fa egy **ága zárt**, ha cáfoló csúcsban végződik.

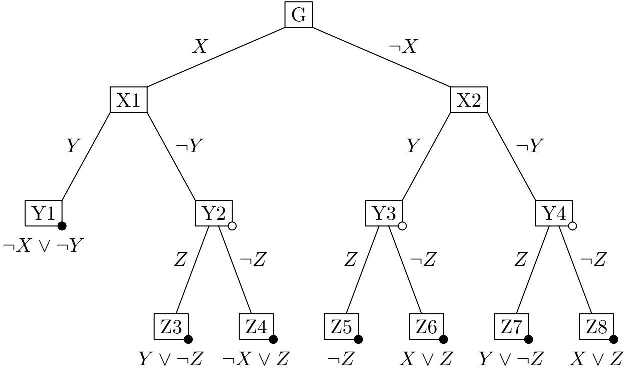
A szemantikus fa zárt, ha minden ága zárt.

Klózok illesztése szemantikus fára (Példa)

$S = \{ Y \vee \neg Z,\ X \vee Z,\ \neg X \vee \neg Y,\ \neg X \vee Z,\ \neg Z \}$ kielégíthetlen klózhalmaz.

Jelölések: cáfoló csúcs ($\bullet$), levezető csúcs ($\circ$)

Zárt szemantikus fa:



Zárt szemantikus fa

Tétel

Ha egy S véges klózhalmaz szemantikus fája zárt, akkor S kielégíthetetlen.

A klózhalmaz kielégíthetetlenségének eldöntésére nem a szemantikus fát használjuk, de fontos háttéreszköz marad a **rezolúciós kalkulus** tulajdonságainak vizsgálatában.

Elnevezések:

- n-változós klóz n-argumentumos klóz
- 1-változós klóz egységklóz
- 0-változós klóz üres klóz: $\square$

Rezolvens képzés

Egyszerűsítési szabály: ha X ítéletváltozó és C egy X-et nem tartalmazó klóz, akkor $(X \vee C) \wedge (\neg X \vee C) \sim_0 C$

Az $(X) \wedge (\neg X) \sim_0 \Box$ – azonosan hamis.

Rezolvens

Legyenek C_1, C_2 olyan klózok, amelyek pontosan egy komplemens literálpárt tartalmaznak: $C_1 = C_1' \vee L_1$ és $C_2 = C_2' \vee L_2$ és $L_1 = \neg L_2$, ekkor létezik a rezolvensük: a $res(C_1, C_2) = C$ klóz, ami $C = C_1' \vee C_2'$.

Tétel (Tk.227-228.o.)

$\{C_1, C_2\} \models_0 C$ A rezolvensképzés a rezolúciós kalkulus levezetési szabálya (helyes következtetésforma).

Rezolúciós levezetés

Rezolúciós levezetés (Tk.229.o.)

Egy S klózhalmazból való **rezolúciós levezetés** egy olyan véges $k_1, k_2, \ldots, k_m$ $(m \geq 1)$ klózsorozat, ahol minden $j = 1, 2, \ldots, m$-re

1. vagy $k_j \in S$,
2. vagy van olyan $1 \leq s, t < j$, hogy k_j a (k_s, k_t) klózpár rezolvense.

A levezetés célja az üres klóz levezetése (ez a megállási feltétel).

Példa rezolúciós levezetésre

Egy rezolúciós levezetés

Próbáljuk meg az üres klózt levezetni az
$S = \{\neg A \vee B, \neg A \vee C, A \vee C, \neg B \vee \neg C, \neg C\}$ klózhalmazból.

$$
\begin{array}{lll}
1. & \neg C & [\in S] \\
2. & A \vee C & [\in S] \\
3. & A & [res(1,2)] \\
4. & \neg A \vee C & [\in S] \\
5. & C & [res(3,4)] \\
6. & \Box & [res(1,5)]
\end{array}
$$

S klózhalmazból való rezolúciós levezetés **döntési eljárás**.
Eldöntésproblémája: *levezethető-e egy S klózhalmazból az üres klóz?*
Rezolúciós cáfolatnak nevezzük azt a tényt, hogy S-ből levezethető az üres klóz.

Rezolúciós kalkulus helyessége, teljessége

A rezolúciós kalkulus helyes (Tk.230.o.)

(6.3.12) Lemma: Legyen S tetszőleges klózhalmaz és $k_1, k_2 \ldots, k_n$ klózsorozat rezolúciós levezetés S-ből. Ekkor minden $k_j, j = 1, 2 \ldots, n$-re szemantikus következménye S-nek.

(6.3.13) Tétel: Legyen S tetszőleges klózhalmaz. Ha S-ből levezethető az üres klóz, akkor S kielégíthetetlen.

Bizonyítások indukcióval, illetve indirekt bizonyítással.

A rezolúciós kalkulus teljes (Tk.230.o.)

(6.3.14). Tétel: Ha az S véges klózhalmaz kielégíthetetlen, akkor S-ből levezethető az üres klóz.

Bizonyítás: tetszőleges zárt szemantikus fa esetén előállítunk egy rezolúciós cáfolatot. (Tk.231-233.o.)

A teljesség bizonyításának algoritmusa

1. $j := 0$, $S_j := S$, *LIST* $:= \emptyset$.
2. Állítsuk elő S_j szemantikus fáját. $n_j :=$ a szemantikus fa szintjeinek száma. Ha $n_j = 0$, akkor levezettük az üres klózt, a levezetés *LIST*-ből kiolvasható.
3. Egyébként válasszuk ki a fa egy levezető csúcsát. A levezető csúcsot tartalmazó két ágra illesztett klózok legyenek k'_j és k''_j, rezolvensük pedig k_j. Tegyük a *LIST* végére a k'_j, k''_j, k_j klózokat.
4. $S_{j+1} := S_j \cup \{k_j\}$, $j := j + 1$. Folytassuk a 2. lépéssel.

Példa

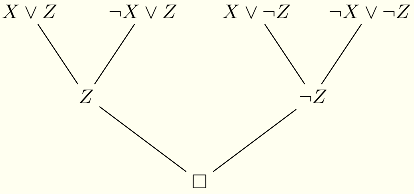
$S = \{X \vee \neg Z,\ \neg X \vee Y,\ \neg X \vee Z,\ X \vee Z,\ \neg Y \vee \neg Z\}$, bázis: Z, X, Y.

Levezetési fa

Levezetési fa Tk.235-236.o.

Egy rezolúciós levezetés szerkezetét mutatja. Olyan gráf, amelynek csúcsaiban klózok vannak. Két csúcsból akkor vezet él egy harmadik csúcsba, ha abban a két csúcsban lévő klózok rezolvense található.

Példa - adott rezolúciós levezetés levezetési fája



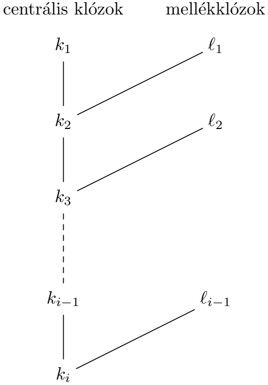
1.	$X \vee Z$	[$\in S_1$]
2.	$\neg X \vee Z$	[$\in S_1$]
3.	Z	[1, 2 rezolvense]
4.	$X \vee \neg Z$	[$\in S_1$]
5.	$\neg X \vee \neg Z$	[$\in S_1$]
6.	$\neg Z$	[4, 5 rezolvense]
7.	$\Box$	[3, 6 rezolvense]

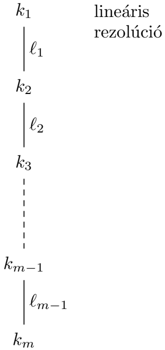
$S_1 = \{X \vee \neg Z,\ \neg X \vee Z,\ X \vee Z,\ \neg X \vee \neg Z\}$

Levezetési stratégiák I.

Lineáris rezolúciós levezetés

Egy S klózhalmazból egy olyan $k_1, l_1, k_2, l_2, \ldots, k_{m-1}, l_{m-1}, k_m$ klózsorozat, ahol $k_1, l_1 \in S$ és minden $i = 2, 3, \ldots, m)$ esetben a k_i a k_{i-1}, l_{i-1} rezolvense, ahol $l_{i-1} \in S$, vagy egy korábban megkapott centrális klóz (rezolvense valamely k_s, l_s $(s < i)$-nek).





Levezetési stratégiák II.

Lineáris inputrezolúciós levezetés

S klózhalmazból egy olyan $k_1, l_1, k_2, l_2, \ldots, k_{m-1}, l_{m-1}, k_m$ klózsorozat, ahol $k_1, l_1 \in S$, és minden $i = 2, 3, \ldots, m-1$ esetben $l_i \in S$, a k_i pedig a k_{i-1}, l_{i-1} rezolvense.

Egységrezolúciós stratégia

Rezolvens csak akkor képezhető, ha legalább az egyik klóz egységklóz.

Reuzolúciós stratégiák: lineáris rezolúció (helyes és teljes), lineáris input-, egység rezolúció (helyes de nem teljes) - Tk.236-238.o.

Az előadásban nem szereplő további rezolúciós stratégiák: Tk.281-300.o.

Horn klózok, Horn logika

Definíció

Egy klózt **Horn klóz**nak nevezünk, ha legfeljebb egy literálja nem negált.

Definíció

Horn logika az összes, csak Horn klózokat tartalmazó KNF alakú formulák halmaza.

Példa

$S = \{B \vee \neg C, A \vee \neg C, \neg A \vee \neg B, \neg A \vee C, C\}$ Horn klózok halmaza.

Tétel

A lineáris input és az egységrezolúciós stratégia teljes a Horn logikában.

Horn klózok, Horn logika

$$S = \{B \vee \neg C, A \vee \neg C, \neg A \vee \neg B, \neg A \vee C, C\}$$

1.	$B \vee \neg C$	$\in S$
2.	$\neg A \vee \neg B$	$\in S$
3.	$\neg A \vee \neg C$	$rez(1, 2)$
4.	$A \vee \neg C$	$\in S$
5.	$\neg C$	$rez(3, 4)$
6.	C	$\in S$
7.	$\square$	$rez(5, 6)$

lineáris input rez.

1.	$B \vee \neg C$	$\in S$
2.	C	$\in S$
3.	B	$rez(1, 2)$
4.	$\neg A \vee \neg B$	$\in S$
5.	$\neg A$	$rez(3, 4)$
6.	$A \vee \neg C$	$\in S$
7.	$\neg C$	$rez(5, 6)$
8.	$\square$	$rez(2, 7)$

egységrezolúció

Horn klózok, Horn logika

Tétel

Ha az $\square$ levezethető lineáris input rezolúcióval egy K klózhalmazból, akkor K-ban van legalább egy egységklóz.
Biz.: Az $\square$-t az utolsó lépésben csak egy klózhalmazbeli egységklóz felhasználásával kaphatjuk meg.

Tétel

Kielégíthetetlen Horn klózhalmazban van legalább egy egységklóz.

Teljes levezetési fa

Teljes levezetési fa adott klózzal kezdődő összes lineáris levezetés megadására.

Legyen $S = \{X \vee Z,\ \neg X \vee Z,\ \neg Y \vee \neg Z,\ \neg X \vee Y,\ \neg Z\}$.