Logika és számításelmélet

I. rész
Logika
Hatodik előadás

Tartalom

Prenex formula, Skolem normálforma

Eldönthető formulaosztályok keresése elsőrendű logikában.

Prenex formula

Legyen Q tetszőleges kvantor, a $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n B$ formula. $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n$ a prefixum, B, kvantormentes formula a formula magja, törzse.

Skolem formula

Skolem formula a $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n A$ Prenex formula, ahol a prefixumban csak univerzális kvantorok szerepelnek. Ez eldönthető formulaosztály elsőrendben.

Elsőrendű klóz

Elsőrendű klóz

Olyan zárt Skolem formula, aminek a magja az elsőrendű nyelv literáljainak (azaz atomi formuláinak vagy annak negáltjainak) diszjunkciója.
Pl. $\forall x \forall y (P(x) \vee \neg Q(x, f(y)))$.

Az ítéletlogikai klózhalmaz (KNF) elsőrendű megfelelője az elsőrendű klózhalmaz (elsőrendű klózok konjunkciója) lehetne.

Alaprezolúció

A **feladat** tetszőleges elsőrendű formula átírása elsőrendű klózok konjunkciós formulájává. Az **eldöntésprobléma elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlenségének** eldöntése.

Ha egy univerzális formulát kifejtünk egy U univerzum felett, akkor a mag alappéldányainak konjunkciója lesz U-ekvivalens az eredeti formulával.

Alaprezolúció

Ha elsőrendű klózok halmazával tesszük ugyanezt, akkor alapklózok hamazát kapjuk. A kifejtett klózhalmaz kielégíthetetlensége a kapott U feletti alapklózok halmazának kielégíthetetlenségével ekvivalens.

Az alapklózokra a rezolúciós kalkulust ugyanúgy definiálhatjuk mint az ítéletlogikában – alaprezolúció (Tk.251-254.o.). Alaprezolúcióval bármely adott U univerzumon való kielégíthetetlenség eldönthető.

Alaprezolúció – Példa

Elsőrendű klózhalmaz:

$S = \{\forall x \forall y (P(x) \vee \neg Q(x, f(y))),\ \forall u \neg P(u),\ \forall z \forall w Q(z, f(w))\}$

$U = \{a, b, c\}$ univerzum feletti kifejtett klózhalmaz:

$\{P(a) \vee \neg Q(a, f(a)),\ P(a) \vee \neg Q(a, f(b)),\ P(a) \vee \neg Q(a, f(c)),$
$P(b) \vee \neg Q(b, f(a)),\ P(b) \vee \neg Q(b, f(b)),\ P(b) \vee \neg Q(b, f(c)),$
$P(c) \vee \neg Q(c, f(a)),\ P(c) \vee \neg Q(c, f(b)),\ P(c) \vee \neg Q(c, f(c)),$
$\neg P(a),\ \neg P(b),\ \neg P(c), Q(a, f(a)),\ Q(a, f(b)),\ Q(a, f(c)),$
$Q(b, f(a)),\ Q(b, f(b)),\ Q(b, f(c)), Q(c, f(a)),\ Q(c, f(b)),\ Q(c, f(c))\}$

Alaprezolúciós levezetés:

1. $P(a) \vee \neg Q(a, f(a))$ $\in S$
2. $Q(a, f(a))$ $\in S$
3. $P(a)$ res(1,2)
4. $\neg P(a)$ $\in S$
5. $\square$ res(3,4)

Formula felírása elsőrendű klózok konjunkciójaként

Hogyan lehet előállítani a vizsgálandó formulát elsőrendű klózok konjunkciójaként?

1. Tetszőleges formula átírható prenex alakba.
2. Tetszőleges prenex formula átírható Skolem alakba.
3. Tetszőleges Skolem normálforma felírható elsőrendű klózok konjunkciójaként.

(1) Tetszőleges formula átírható prenex alakba

Az átalakításhoz szükséges átalakítási szabályok.

	Általános De Morgan szabályok
	$\neg\forall x A \sim \exists x \neg A$
	$\neg\exists x A \sim \forall x \neg A$
	Kvantorkiemelési szabályok
(1)	$\forall x A[x] \wedge B \sim \forall x (A[x] \wedge B)$
	$\forall x A[x] \vee B \sim \forall x (A[x] \vee B)$
(2)	$\exists x A[x] \wedge B \sim \exists x (A[x] \wedge B)$
	$\exists x A[x] \vee B \sim \exists x (A[x] \vee B)$

(1) Tetszőleges formula átírható prenex alakba

Kvantorkiemelési szabályok

(3) $\forall x A[x] \wedge \forall x B[x] \sim \forall x (A[x] \wedge B[x])$, de $\vee$-re nem

(4) $\exists x A[x] \vee \exists x B[x] \sim \exists x (A[x] \vee B[x])$, de $\wedge$-re nem

(5) $Q_1 x A[x] \wedge Q_2 x B[x] \sim Q_1 x Q_2 z (A[x] \wedge B[x/z])$

(6) $Q_1 x A[x] \vee Q_2 x B[x] \sim Q_1 x Q_2 z (A[x] \vee B[x/z])$

A prenex formába való átírás algoritmusa

1. A logikai összekötőjelek átírása $\neg, \wedge, \vee$-ra.
2. A De Morgan szabályok alkalmazása addig amíg a $\neg$ hatásköre atomi formula nem lesz.
3. A kvantorkiemelési szabályok alkalmazása addig amíg minden kvantor a formula elejére nem kerül (a formula törzse kvantormentes formula).

Prenex fomrára való átírás - példa

$$\forall x(\forall y P(x,y) \wedge \exists y \neg (Q(y) \supset P(x,a))) \supset \neg \forall x \exists y (P(y,x) \supset R(x,y))$$

- 1. lépés

  $\neg(\forall x(\forall y P(x,y) \wedge \exists y \neg(\neg Q(y) \vee P(x,a))) \vee \neg \forall x \exists y(\neg P(y,x) \vee R(x,y))$

- 2. lépés

  $\exists x \neg(\forall y P(x,y) \wedge \exists y \neg(\neg Q(y) \vee P(x,a))) \vee \exists x \neg \exists y(\neg P(y,x) \vee R(x,y))$

  $\exists x(\neg \forall y P(x,y) \vee \neg \exists y \neg(\neg Q(y) \vee P(x,a))) \vee \exists x \forall y \neg(\neg P(y,x) \vee R(x,y))$

  $\exists x(\exists y \neg P(x,y) \vee \forall y \neg\neg(\neg Q(y) \vee P(x,a))) \vee \exists x \forall y(P(y,x) \wedge \neg R(x,y))$

  $\exists x(\exists y \neg P(x,y) \vee \forall y(\neg Q(y) \vee P(x,a))) \vee \exists x \forall y(P(y,x) \wedge \neg R(x,y))$

Példa folyt.

- 3. lépés (kvantorkiemelési szabályok)

  $\exists x(\exists y \neg P(x,y) \vee \forall y(\neg Q(y) \vee P(x,a)) \vee \forall y(P(y,x) \wedge \neg R(x,y)))$.

  $\exists y$ kiemeléséhez először végrehajtjuk az y/y_1 helyettesítést a $\forall y$-al kezdődő első részformulában és az y/y_2 helyettesítést a $\forall y$-al kezdődő második részformulában.

  $\exists x(\exists y \neg P(x,y) \vee \forall y_1(\neg Q(y_1) \vee P(x,a)) \vee \forall y_2(P(y_2,x) \wedge \neg R(x,y_2)))$

  $\exists x \exists y(\neg P(x,y) \vee \forall y_1(\neg Q(y_1) \vee P(x,a)) \vee \forall y_2(P(y_2,x) \wedge \neg R(x,y_2)))$

  Utolsó lépés:

  $\exists x \exists y \forall y_1 \forall y_2(\neg P(x,y) \vee (\neg Q(y_1) \vee P(x,a)) \vee (P(y_2,x) \wedge \neg R(x,y_2)))$

Megkaptuk a prenex formulát. A mag DNF.

Ha a prenex formula törzse KNF-ben vagy DNF-ben van, akkor a formula normálforma: prenex konjunktív / prenex diszjunktív formula.

(2) Tetszőleges prenex formula átírható Skolem formába

Tekintsük az első egzisztenciális kvantort a prefixumban, legyen ez $\exists x_j$. Ha a formula igaz egy interpretációban, akkor az $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}$ változók minden értékkombinációjához létezik legalább egy értéke az x_j változónak amelyre a formula értéke i. Ezt a tényt az $f(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}) = x_j$ (Skolem) függvénnyel fejezzük ki. Ez a függvény rendeli az x_j -hez a megfelelő értéket az $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}$ változók minden változókiértékelése esetén. Ezt a lépést végrehajtjuk a soronkövetkező egzisztenciális kvantorra addig amíg, minden egzisztenciális kvantort nem elimináltunk.

Példa

Példa 1.

$\forall x \exists y P(x, y)$
Skolem alak: $\forall x P(x, f(x))$

Példa 2.

$\exists x \exists y \forall y_1 \forall y_2 (\neg P(x, y) \vee \neg Q(y_1) \vee P(x, a) \vee P(y_2, x) \wedge \neg R(x, y_2))$

x és y-hoz tartozó Skolem függvények 0 változósak (Skolem konstansok), pl. q, r. Skolem alak:
$\forall y_1 \forall y_2 (\neg P(q, r) \vee \neg Q(y_1) \vee P(q, a) \vee P(y_2, q) \wedge \neg R(q, y_2))$

(3) Tetszőleges Skolem normálforma felírható elsőrendű klózok konjunkciójaként

A Skolem normálforma magja KNF, az elsőrendű nyelv literáljaiból felírt klózok konjunkciós lánca.

Példa

$$\forall x \forall y \forall y_1((\neg P(x,y) \vee Q(y_1)) \wedge (R(y, f(x) \vee P(x,a)) \\ \wedge\ (P(x,y_1) \vee \neg R(x,y)))$$

A konjunkciós láncban a 3. kvantorkiemelési szabály alkalmazható. Így a formula elsőrendű klózok konjunkciós láncaként felírt alakja:

$$\forall x \forall y \forall y_1(\neg P(x,y) \vee Q(y_1)) \wedge \forall x \forall y \forall y_1(R(y, f(x)) \vee P(x,a)) \\ \wedge\ \forall x \forall y \forall y_1(P(x,y_1) \vee R(x,y))$$

(3) folyt.

Elsőrendű klózokból álló konjunkciós lánc kielégíthetetlenségének vizsgálata.

Mivel egy kvantált formula értéke **nem függ a benne szereplő kötött változó értékétől**, ezeket a változókat át lehet nevezni.

Példa

$$\forall x \forall y \forall y_1 (\neg P(x,y) \vee \neg Q(y_1)) \wedge \forall z \forall w \forall y_1 (R(w, f(z)) \vee P(z,a))$$
$$\wedge\ \forall v \forall z_1 \forall y_3 (P(v, y_3) \vee \neg R(v, z_1))$$

változóidegen klózok konjunkciója.

Átalakítható változóidegen elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlenségének vizsgálatává.

Példa

$$\{(\neg P(x,y) \vee \neg Q(y_1)), (R(w, f(z)) \vee P(z,a)), (P(v, y_3) \vee \neg R(v, z_1))\}$$

Kielégíthetőség és az U számossága

Ha egy formula azonosan igaz $|U| = n$ számosságon, akkor ennél kisebb számosságon is azonosan igaz. (Tk.257.o.)

Ha egy formula kielégíthető $|U| = n$ számosságon, akkor ennél nagyobb számosságon is kielégíthető.(Tk.258.o.)

Löwenheim-Skolem tétel Tk.258.o.

Ha egy formula kielégíthető egyáltalán, akkor kielégíthető legfeljebb megszámlálhatóan végtelen U-n.

Elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlensége

A kielégíthetetlenségre hasonló tételek nincsenek.

Egy S elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlen, ha minden interpretációban **legalább egy klóza hamis**.

Egy **elsőrendű klóz hamis** egy interpretációban, ha az interpretáló struktúra U univerzumán kifejtve a magból kapott **alapklózok közül legalább egy hamis** ebben az interpretációban.

Elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlensége

Egy S **elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlen** U felett, ha az U-n definiálható minden struktúrában az **alapklózok** halmaza kielégíthetetlen. Ha az S elsőrendű klózhalmazból az adott számosságú univerzumon a kifejtéssel megkapott alapklózok halmazából alaprezolúcióval levezethető az üres klóz, akkor a klózhalmaz **ezen az univerzumon** kielégíthetetlen. Ha egy S kielégíthetetlen egy $|U| = n$ számosságú univerzumon, még lehet nagyobb számosságon kielégíthető.

Példa, TK. 254.o. / 6.3.45.

$\forall x \forall y \exists z ((P(x,y) \supset \neg P(y,x)) \wedge (P(x,z) \vee P(z,y)))$

Bebizonyítható, hogy a formula nem elégíthető ki kételemű univerzumon, de háromelemű univerzumon már kielégíthető.

Elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlensége

Herbrand megmutatta, hogy ha tekintjük az **elsőrendű klózhalmaz leíró nyelvének alaptermjei**ből álló halmazt a Herbrand-univerzumot ($\mathcal{H}$-t), akkor a klózhalmaz akkor lesz kielégíthetetlen, ha $\mathcal{H}$-n kielégíthetetlen. Minden elsőrendű nyelvhez (elsőrendű klózhalmazhoz) létezik **legfeljebb megszámlálhatóan végtelen számosságú Herbrand-univerzum**.

Egy elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlen akkor és csak akkor, ha Herbrand-univerzumán kielégíthetetlen.

Herbrand-univerzum előállítása Tk.259.o.

Herbrand-univerzum konstrukciója lépésről lépésre:

1. $\mathcal{H}_0 = \{S$-ben előforduló konstansok halmaza$\}$ vagy ha a klózhalmazban nincs konstans szimbólum, akkor egy szimbolikus konstans $\{a\}$.
2. $\mathcal{H}_{i+1} = \mathcal{H}_i \cup F_i$, ahol F_i azon alaptermek halmaza, amelyeket $\mathcal{H}_i$ elemeinek a klózhalmazban lévő függvényszimbólumokba való behelyettesítésével kapjuk.
3. $\mathcal{H}_\infty = \bigcup\limits_{k \in \mathbf{N}} \mathcal{H}_k$

Alaprezolúció Herbrand-univerzum felett

Példa

Tekintsük az $S = \{P(x),\ \neg Q(y,z) \vee \neg P(z),\ Q(u, f(u))\}$ klózhalmazt.

$\mathcal{H}_0 = \{a\}$ - fiktív konstans
$\mathcal{H}_1 = \{a, f(a)\}$
$\mathcal{H}_j = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots, f(\ldots f(a) \ldots)\}$ - j-szeres iteráció
$\mathcal{H}_\infty = \{a, f(a), f(f(a)), \ldots, f(\ldots f(a) \ldots), \ldots\}$

Alapklózhalmaz a Herbrand-univerzum felett:

$$S = \{P(a),\ \neg Q(a,a) \vee \neg P(a),\ Q(a, f(a)),\ P(f(a)),\ \neg Q(a, f(a)) \vee \neg P(f(a)), \ldots\}$$

Alaprezolúciós levezetés:

1. $\neg Q(a, f(a)) \vee \neg P(f(a))$ $\quad \in S$
2. $P(f(a))$ $\quad \in S$
3. $\neg Q(a, f(a))$ $\quad$ res(1,2)
4. $Q(a, f(a))$ $\quad \in S$
5. $\square$ $\quad$ res(3,4)

Herbrand-bázis

Herbrand-bázis

Legyen S egy elsőrendű klózhalmaz és $\mathcal{H}$ a klózhalmazhoz tartozó Herbrand-univerzum. A $\mathcal{H}$ Herbrand-univerzum feletti alapatomok egy rögzített sorrendjét *Herbrand-bázisnak* nevezzük.

Példa

Az előző $S = \{P(x), \neg Q(y,z) \vee \neg P(z), Q(u, f(u))$ klózhalmaz esetén egy lehetséges Herbrand-bázis:
$\{P(a), Q(a,a), P(f(a)), Q(a, f(a)), Q(f(a), a), Q(f(a), f(a)),$
$P(f(f(a))), \ldots\}$

Herbrand-interpretáció

Herbrand-interpretáció

Legyen az S klózhalmaz leíró nyelve $\langle Pr, Fn, Cnst \rangle$, Herbrand-univerzuma pedig $\mathcal{H}$. *Herbrand-interpretációinak* nevezzük és $\mathcal{I}_\mathcal{H}$-vel jelöljük a nyelv azon interpretációit, melyek univerzuma éppen $\mathcal{H}$, és

- minden $c \in Cnst$ konstansszimbólumhoz a $c \in \mathcal{H}$ univerzumelemet (önmagát) rendeli, és
- minden k aritású $f \in Fn$ függvényszimbólumhoz hozzárendeli azt az $f^{\mathcal{I}_\mathcal{H}} : \mathcal{H}^k \to \mathcal{H}$ műveletet, amelyikre minden $h_1, h_2, \ldots, h_k \in \mathcal{H}$ esetén

$$f^{\mathcal{I}_\mathcal{H}}(h_1, h_2, \ldots, h_k) = f(h_1, h_2, \ldots, h_k).$$

Egy S elsőrendű klózhalmaz Herbrand-interpretációi tehát csak az S-ben előforduló predikátumszimbólumok interpretálásában különböznek.

Herbrand-interpretáció

Az előzőek alapján, ha adva van az S elsőrendű klózhalmaz egy $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ Herbrand-interpretációja, azt a következő módon is leírhatjuk: Legyen $\{A_1, A_2, \ldots\}$ az S klózhalmaz Herbrand-bázisa és legyen

$$L_i \rightleftharpoons \begin{cases} A_i, & \text{ha } A_i \text{ igaz } \mathcal{I}_{\mathcal{H}}\text{-ban}, \\ \neg A_i, & \text{ha } A_i \text{ hamis } \mathcal{I}_{\mathcal{H}}\text{-ban}. \end{cases}$$

Ekkor a $\mathcal{I}_{\mathcal{H}}$ Herbrand-interpretációt az $\{L_1, L_2, \ldots\}$ alapliterál-halmaz egyértelműen megadja.

Herbrand-interpretáció – Példa

Példa

Legyen $S = \{P(x) \vee Q(x), R(f(y))\}$. S Herbrand-univerzuma:

$$\mathcal{H} = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \ldots\}.$$

S egy Herbrand-bázisa:

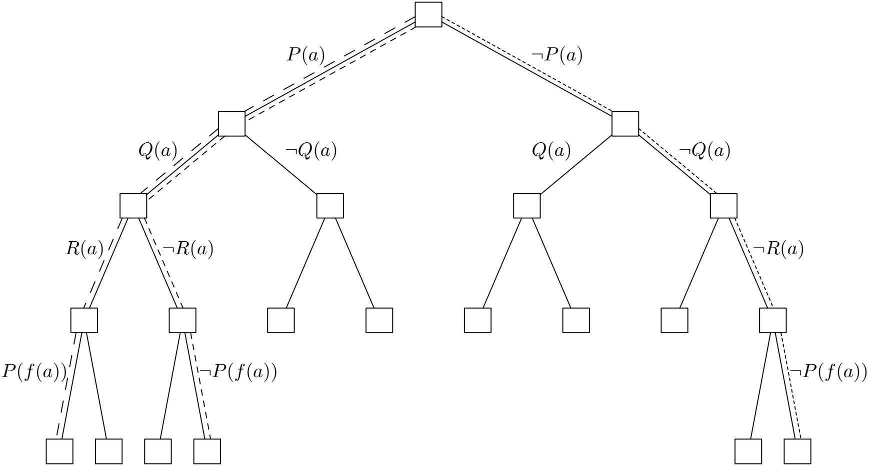
$$\{P(a), Q(a), R(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a)), \ldots\}.$$

Néhány Herbrand-interpretáció:

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{I}_1 & = & \{P(a), Q(a), R(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a)), \ldots\} \\ \mathcal{I}_2 & = & \{\neg P(a), \neg Q(a), \neg R(a), \neg P(f(a)), \neg Q(f(a)), \neg R(f(a)), \ldots\} \\ \mathcal{I}_3 & = & \{P(a), Q(a), \neg R(a), \neg P(f(a)), Q(f(a)), \neg R(f(a)), \ldots\} \end{array}$$

Herbrand-interpretáció – Példa

Az $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ és $\mathcal{I}_3$ interpretációk szemléltetése az előző Herbrand-bázis felhasználásával készül szemantikus fán:



Tételek Herbrand-interpretációhoz kapcsolódóan

Tétel Tk.6.3.61

Egy elsőrendű klózhalmaz akkor és csak akkor kielégíthetetlen, ha a Herbrand-univerzuma feletti egyetlen Herbrand-interpretáció sem elégíti ki. Nincs Herbrand-modellje.

A 6.3.61 tétel csak **elsőrendű klózhalmaz** esetén áll fenn. Példa:

Legyen egy nem elsőrendű klózhalmaz $S = \{P(a), \exists x \neg P(x)\}$.
S Herbrand-univerzuma: $\{a\}$, Herbrand-bázisa $\{P(a)\}$,
Herbrand-interpretációk: $P(a), \neg P(a)$. Egyikük sem elégíti ki S-et.
Ugyanakkor S kielégíthető például az $U = \{0, 1\}(P(x))$ struktúrában, ahol $P(0) = i$ és $P(1) = h$.

Herbrand tételek

H1 Tk.263.o.

Egy S elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlen akkor és csak akkor, ha S bármely szemantikus fájához van véges zárt szemantikus fája.

H2 Tk.264.o.

Egy S elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlen akkor és csak akkor, ha S klózai alapelőfordulásainak van véges kielégíthetetlen S' részhalmaza.

Példa alaprezolúcióra

Előállítjuk az elsőrendű klózok magjainak összes alappéldányát és az alapklózok halmazán ítéletlogikai rezolúcióval levezetjük az üres klózt.

Az elsőrendű klózhalmaz:

$$\{\forall x \forall y (P(x) \vee \neg Q(x, f(y))),$$
$$\forall z \forall v (\neg P(g(z)) \vee \neg P(v)),$$
$$\forall u (Q(g(u), u))\}$$

Herbrand-univerzum:

$$\{a, g(a), f(a), g(f(a)), g(g(a)), f(f(a)), f(g(a)), \ldots\}$$

(A klózhalmaz leíró nyelvének összes alaptermje)

Példa folyt.

Alapklózok különböző helyettesítések esetén:

x	y	z	v	u	$\{P(x) \vee \neg Q(x, f(y)),$ $\neg P(g(z)) \vee \neg P(v),$ $Q(g(u), u)\}$
a	a	a	a	a	$\{P(a) \vee \neg Q(a, f(a)),$ $\neg P(g(a)) \vee \neg P(a),$ $Q(g(a), a)\}$
$g(a)$	a	a	$g(a)$	a	$\{P(g(a)) \vee \neg Q(g(a), f(a)),$ $\neg P(g(a)) \vee \neg P(g(a)),$ $Q(g(a), a)\}$
$g(a)$	a	a	$g(a)$	$f(a)$	$\{P(g(a)) \vee \neg Q(g(a), f(a)),$ $\neg P(g(a)) \vee \neg P(g(a)),$ $Q(g(f(a)), f(a))\}$
$g(f(a))$	a	$f(a)$	$g(f(a))$	$f(a)$	$\{P(g(f(a))) \vee \neg Q(g(f(a)), f(a)),$ $\neg P(g(f(a))) \vee \neg P(g(f(a))),$ $Q(g(f(a)), f(a))\}$

Példa folyt.

Alaprezolúció:

1.	$Q(g(f(a)), f(a))$	$u \parallel f(a)$	1.	X
2.	$P(g(f(a))) \vee \neg Q(g(f(a)), f(a))$	$x \parallel g(f(a)), y \parallel a$	2.	$Y \vee \neg X$
3.	$P(g(f(a)))$		3.	Y
4.	$\neg P(g(f(a)))$	$z \parallel f(a), v \parallel g(f(a))$	4.	$\neg Y$
5.	$\square$		5.	$\square$

Legyen a bázis első két eleme $P(g(f(a))), Q(g(f(a)), f(a))$.

Illesszük szemantikus fára az alapklózhalmazt.