Osztott rendszerek analízise.

Tejfel Máté

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Programozási Nyelvek és Fordítóprogramok Tanszék
matej@inf.elte.hu

Szakirodalom

- Bagyinszkiné Orosz Anna : *Petri hálók I.* ELTE, Numerikus és Gépi Matematika Tanszék, Budapest, 1977.
- Murata, T.: Petri Nets, Properties, Analysis and Applications. *Proc. of the IEEE*. Vol. 77., no. 4, ASpr 1989, 541-580.
- Iványi Antal szerk..: *Informatikai Algoritmusok 2. (24. fejezet)* Elte Eötvös Kiadó, 2005.
- `http://www.laas.fr/tina`
  A TINA eszköz honlapja.
- `http://matej.web.elte.hu`

1. Bevezetés, alapfogalmak

Páros gráf fogalma: olyan gráf, amelyben a csúcsok két diszjunkt halmazba sorolhatóak oly módon, hogy az azonos halmazba tartozó csúcsok között nem vezet él.

1.1. Definíció. *(Petri háló)*
A Petri háló egy (N, M_0) rendezett pár, ahol:

- $N = (P, T, R, v)$ a tartógráf, irányított, páros gráf, amelynek az élei súlyozottak,
- P, T : a csúcsok véges halmazai. P a helyek halmaza, T az átmenetek halmaza.
- $P \cup T \neq \emptyset$
- $P \cap T = \emptyset$

1.2. Definíció. *(Petri háló - folytatás)*

- R - az éleket megadó reláció:
  $R \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$
- $v : R \mapsto \mathcal{N}_0$ - az élek súlyait megadó függvény.
- A helyek kezdeti súlyozását (kezdőállapot) az M_0 adja meg.
  $M_0 : P \to \mathcal{N}_0$
  A helyek súlyozását (állapot) általában rendezett n-esként adjuk meg, pl.: $M_0 = (1, 0, .., 2)$.

Jelölések

p helyet megelőző átmenetek halmaza: ${}^\bullet p ::= R^{(-1)}(p)$, illetve

t átmenetet megelőző helyek halmaza: ${}^\bullet t ::= R^{(-1)}(t)$.

Adott csúcs utódja(i): $p^\bullet ::= R(p), t^\bullet ::= R(t)$.

1.3. Definíció. *(Működési szabály, (alapéertelmezés))*

1. t aktivizálható, ha $\forall p \in^{\bullet} t : M(p) \geq v(p,t)$.
2. t átmenet után az új M‘ súlyozás:
   $\forall p \in P : M‘(p) = M(p) + v(t,p) - v(p,t)$

Forrás átmenet: ${}^{\bullet}t = \emptyset$

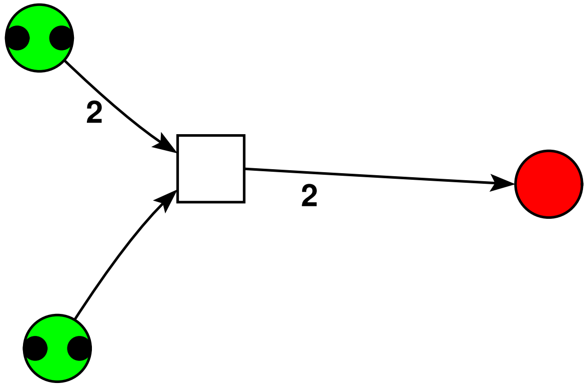
Nyelő átmenet: $t^{\bullet} = \emptyset$

Hurok: $(p,t) : p \in^{\bullet} t \wedge p \in t^{\bullet}$

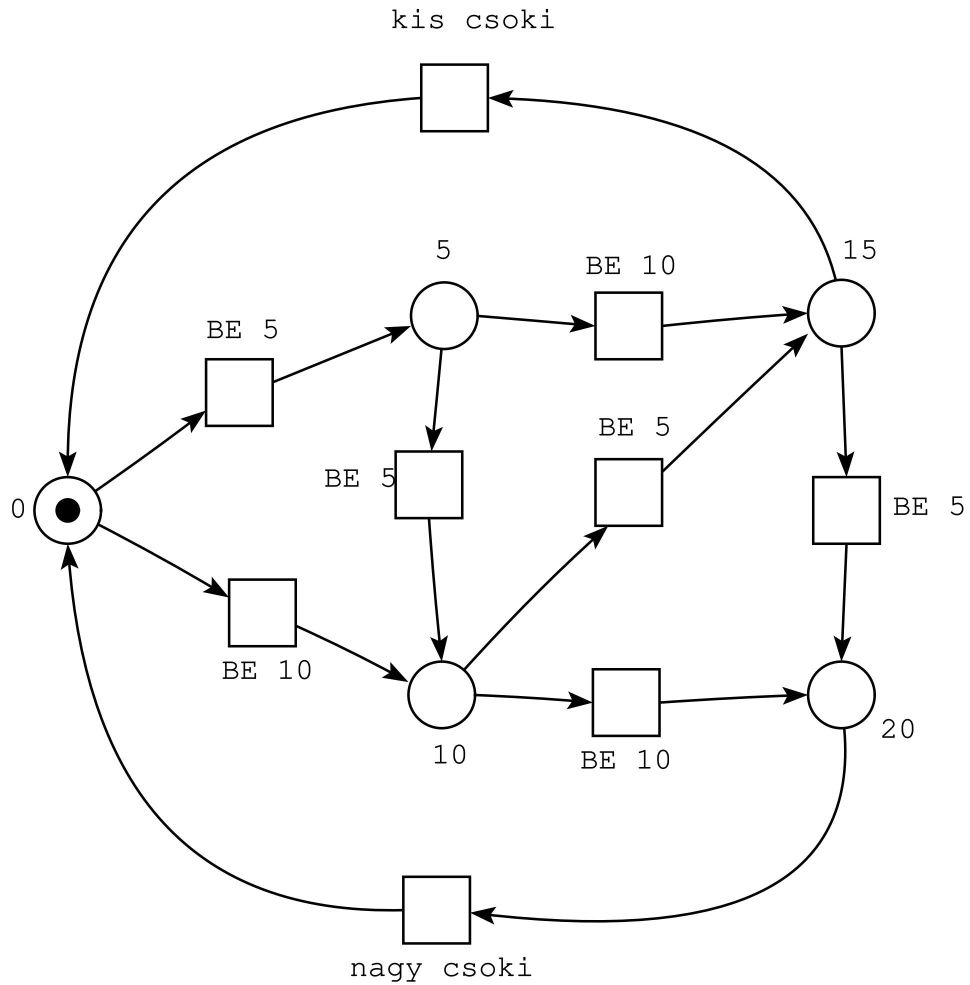
Átlátszó háló: hurokmentes.

Normális háló: minden él súlya 1: $\forall r \in R : v(r) \leq 1$.

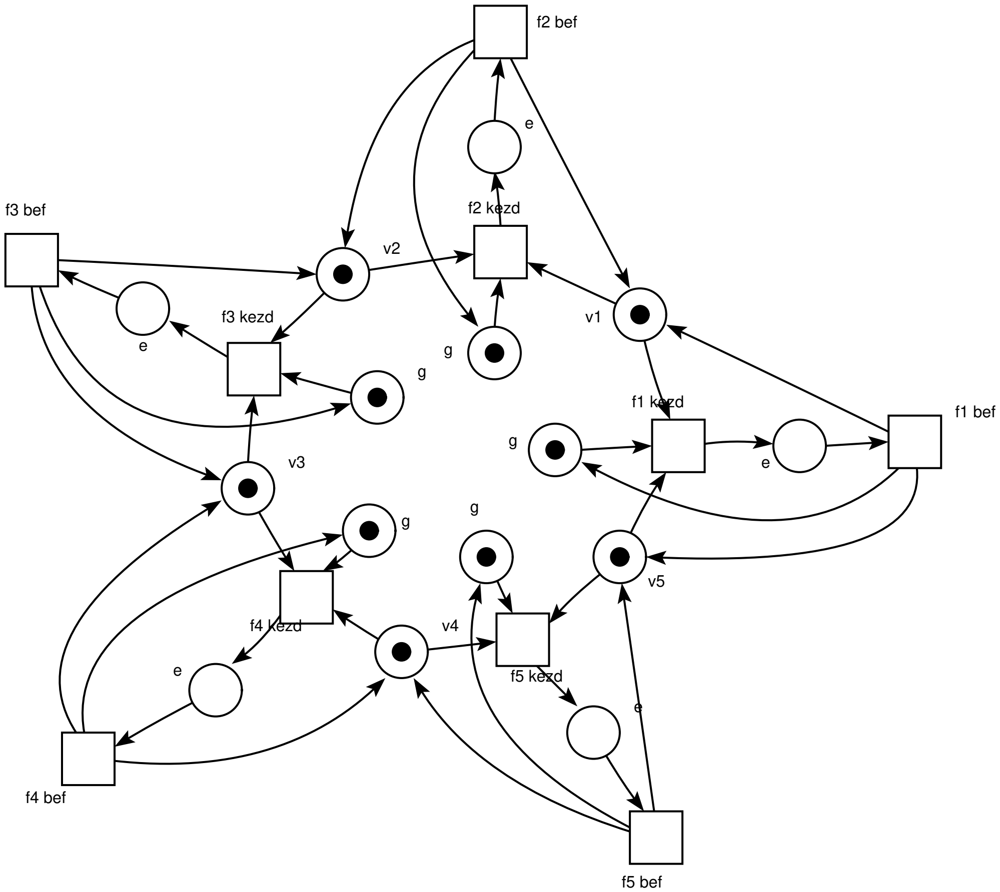
1.1. Példa. *(Víz szintézise)*



1.2. Példa. *(Csokiautomata)*



1.3. Példa. *(Evő filozófusok)*



2. Kapacitás korlát

A háló egyes helyeinek súlya nem haladhat meg egy előre megadott értéket: $k : P \mapsto \mathcal{N}_0$.

2.1. Definíció. *(Szigorú működési szabály)*
A kapacitáskorlát túllépése esetén az átmenet nem megengedett:

1/a. t aktivizálható, ha
$\forall p \in {}^\bullet t : M(p) \geq v(p,t)$ és $\forall p \in t^\bullet : M''(p) \leq k(p)$, ahol
$M''(p) = M(p) + v(t,p) - v(p,t)$.

2.2. Definíció. *(Gyenge működési szabály)*
t átmenet esetén a felesleg elnyelődik:

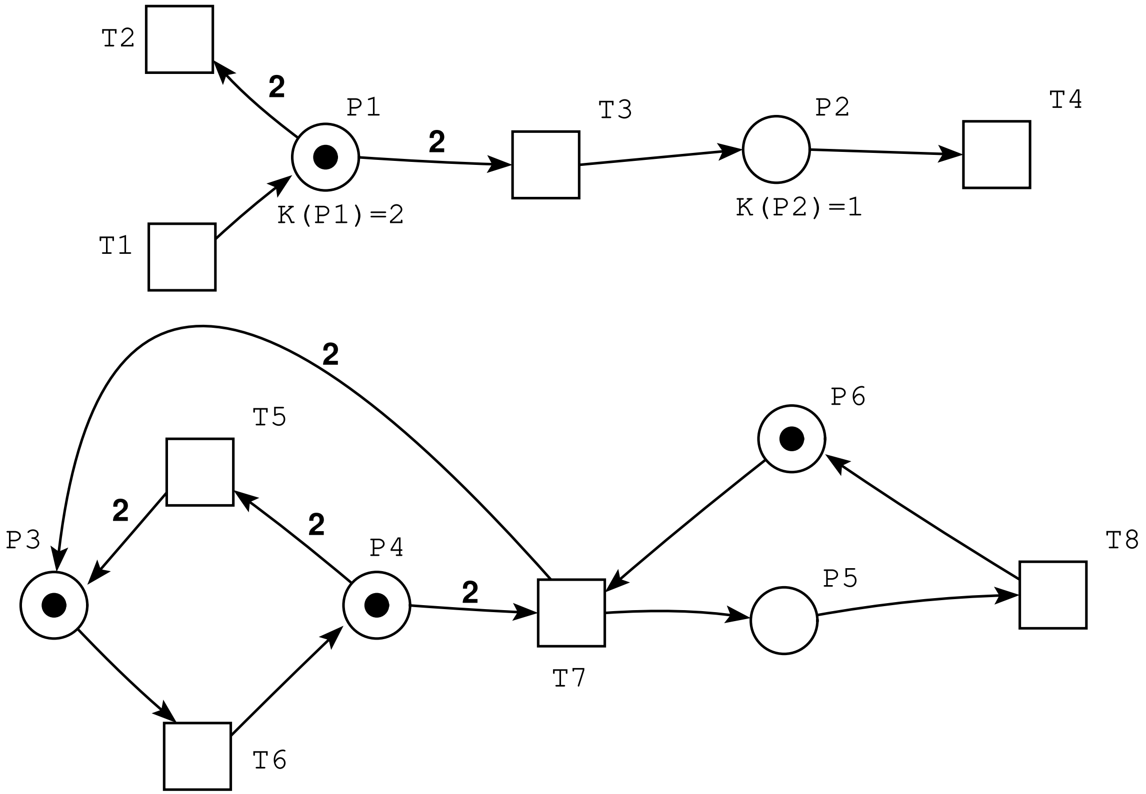
2/b. t után az új M‘ súlyozás: $\forall p \in P$:
$M‘(p) = min(k(p), M(p) + v(t,p) - v(p,t))$

Korlátos kapacitású helyek kiküszöbölése

2.3. Definíció. *(Komplemens helyek bevezetése)*

1. $\forall p \in P : k(p) < \infty$ helyhez bevezetünk egy komplemens p‘ helyet úgy, hogy
   $M‘_0(p‘) = k(p) - M_0(p)$.
   Jelöljük a komplemens helyek halmazát P'-vel.
2. $\forall p \in P', t \in T$ párhoz bevezetünk egy új élet úgy, hogy
   $v(t, p‘) = v(p, t)$ és $v(p‘, t) = v(t, p)$.

2.1. Példa. *(Korlátos kapacitású helyek)*



Akciósorozatnak nevezzük a háló által végrehajtott átmenetek sorozatát. Például: $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8 ...$

2.1. Tétel. *(Korlátos kapacitású helyek kiküszöbölése)*
(N, M_0) átlátszó, korlátos kapacitású háló, szigorú működési szabállyal. $(N‘, M‘_0)$ az (N, M_0)-ból hely-komplemens transzformációval kapott háló. Ekkor (N, M_0) és $(N‘, M‘_0)$ hálók ekvivalensek az összes lehetséges akciósorozat értelmében.

3. Viselkedési tulajdonságok (súlyozásfüggő)

$M_0\,[\varsigma{>}M_n$, ahol $\varsigma = t_1, t_2, .., t_n$ akciósorozat.

$M_0\,[t_1{>}M_1\,[t_2{>}M_2..M_{n-1}\,[t_n{>}M_n$

Jelölések

$L(N, M_0)$ - azon akciósorozatok halmaza, amely az N-ben elérhető az M_0 súlyozásból.

$R(N, M_0)$: N hálóban az M_0 kezdő súlyozásból elérhető súlyozások halmaza (röviden $\overrightarrow{M_0}$ vagy $R(M_0)$, ha N adott).

Általánosan: $R(N, M) = \{M' \mid \exists\varsigma \in L(N, M) : M\,[\varsigma{>}M'\}$.

3.1. Megjegyzés. *(Elérhetőség, ekvivalencia)*
Adott súlyozás elérhető-e ($M \in R(N, M_0)$)?): eldönthető.

Két adott háló ekvivalens-e akciósorotatokra nézve
($L(N_1, M_0) = L(N_2, M_0)$?): általában **nem** eldönthetõ.

Jelölés: $\#(\varsigma, t)$: ς-ban t átmenet előfordulásának száma.

3.1. Definíció. *(K - korlárosság, biztonságosság)*
$k \in \mathcal{N}$. $Az(N, M_0)$ Petri háló k - korlátos, ha $\forall M \in R(N, M_0)$:
$\forall p \in P : M(p) \leq k$.
Biztonságos egy Petri háló, ha 1 - korlátos.

3.2. Definíció. *(Elevenség)*
Legyen $t \in T$. M_0 kezdősúlyozástól függően az N Petri hálóban a t átmenet eleven

L_0 szinten (holt): $\forall\varsigma \in L(N, M_0) : t \notin \varsigma$,

L_1 szinten (aktivizálható): $\exists\varsigma \in L(N, M_0) : t \in \varsigma$,

L_2 szinten: $\forall k \in \mathcal{N} : \exists\varsigma \in L(N, M_0) : \#(\varsigma, t) \geq k$,

L_3 szinten: $\exists\varsigma \in L(N, M_0) : \#(\varsigma, t) = \infty$,

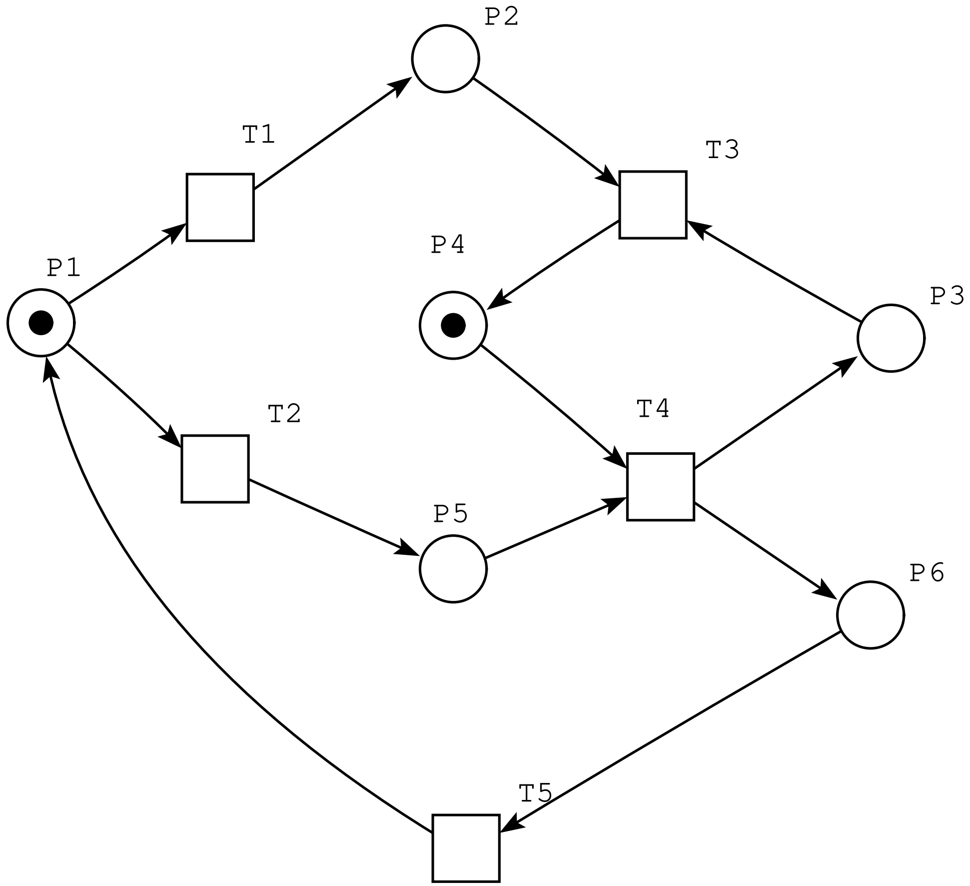
L_4 szinten: $\forall M \in R(M_0)$-ra a t L_1 szinten eleven.

3.2. Megjegyzés. $\mathsf{L}_4 \Rightarrow \mathsf{L}_3 \Rightarrow \mathsf{L}_2 \Rightarrow \mathsf{L}_1$,
$\neg\mathsf{L}_0 \Leftrightarrow \mathsf{L}_1$

Szigurúan L_k eleven: L_k eleven, de nem L_{k+1}

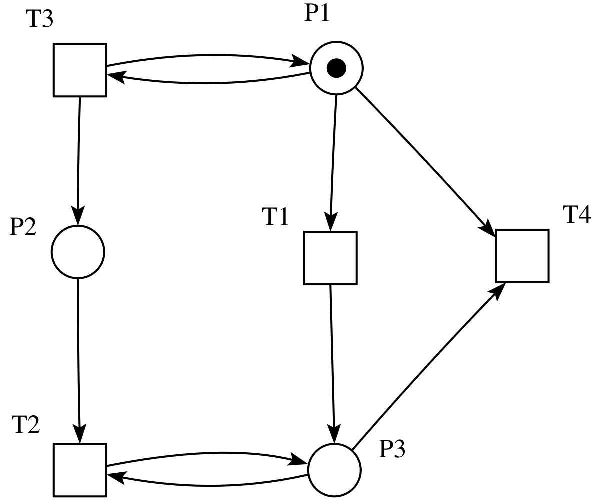
Petri háló L_k eleven: (N, M_0) $\forall t \in T : t$ L_k eleven.

3.1. Példa. (L_1)



biztonságos, nem eleven,
szigorúan 1–szinten eleven
t1; t2,t4,t5,t2; t2,t4,t5,t1,t3

3.2. Példa. *(L_0,(0-3) – t1; t3!; t3(k),t1,t2(k))*



3.3. Definíció. *(Visszatérési képesség)*
(N,M$_0$) esetén $\forall M \in R(M_0) : M_0 \in R(M)$.

3.4. Definíció. *(Otthonállapot)*
M‘ otthonállapot, ha $\forall M \in R(M_0) : M‘ \in R(M)$.

3.5. Definíció. *(Lefedhetőség)*
(N, M_0) Petri háló esetén az M súlyozás lefedhető, ha $\exists M‘ \in R(M_0) : \forall p \in P : M‘(p) \geq M(p)$.

3.3. Megjegyzés. *(Elevenség és lefedhetőség)*
$t \in T$ esetén: t L_1 eleven $\Leftrightarrow$ $^\bullet t$ lefedhető,
t holt $\Leftrightarrow$ M nem lefedhető.

3.6. Definíció. *(Megbízhatóság (perzisztencia), (Javított definíció!))*

(N,M_0) megbízható, ha $\forall t1, t2 \in T$:, ha t_1 és t_2 is engedélyezett (aktivizálható), akkor (közvetlenül) t_1 aktivizálása után t_2 továbbra is engedélyezett (aktivizálható) marad. Azaz egy megbízható hálóban ha egy átmenet aktivizálhatóvá válik, akkor mindaddig az marad, amíg végre nem hajtódik.

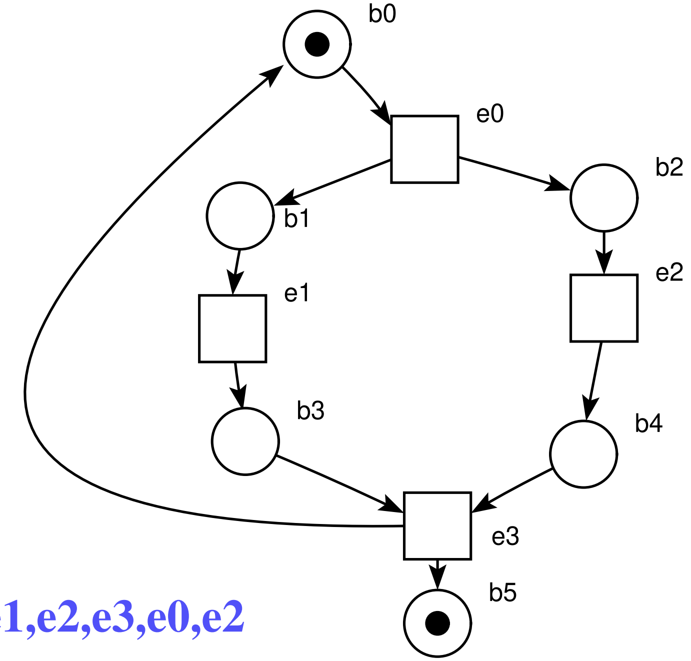
3.7. Definíció. *(Szinkronizációs távolság)*
$(N, M_0) : t_1, t_2 \in T$ esetén
$d_{1,2} := \max_{\varsigma \in L(N,M), M \in R(M_0)} |\#(\varsigma, t_1) - \#(\varsigma, t_2)|$

3.8. Definíció. *(Szinkronizációs távolság (2))*
$(N, M_0) : E_1, E_2 \subseteq T$ esetén
$d_{E_1,E_2} := \max_{\varsigma \in L(N,M), M \in R(M_0)} |\#(\varsigma, E_1) - \#(\varsigma, E_2)|$

3.4. Megjegyzés. *(Grafikus reprezentáció új hely bevezetésével)*

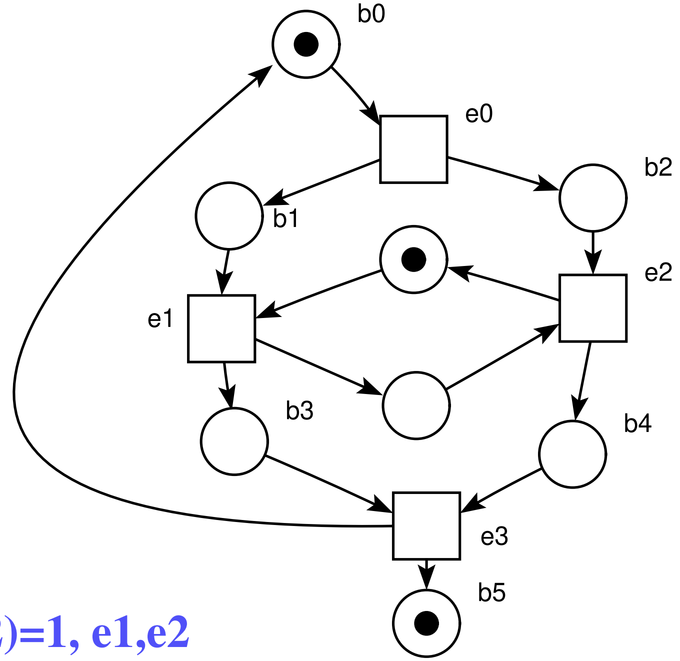
A szinkronizációs távolságot jellemző új hely: $s_{1,2}, s_{2,1}$, ahol
$^\bullet s_{1,2} = E_1, s^\bullet_{1,2} = E_2$, ill. $^\bullet s_{2,1} = E_2, s^\bullet_{2,1} = E_1$.

3.3. Példa. *(Szinronizációs távolság(1))*



d(1,2)=2, e1,e2,e3,e0,e2

3.4. Példa. *(Szinronizációs távolság(2))*



d(1,2)=1, e1,e2

3.9. Definíció. *(Pártatlanság (fair, b-fair))*

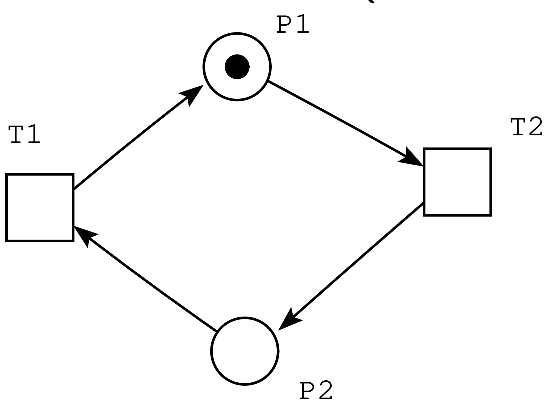
1. Egy háló korlátosan pártatlan t_i, t_j-re nézve, ha bármely aktivizációs sorozatban t_i előfordulása az ütemezés során korlátos t_j következő előfordulásáig és viszont.
2. A háló korlátosan pártatlan, ha $\forall t_i, t_j \in T$: a háló korlátosan pártatlan t_i, t_j-re nézve.
3. $\forall M \in R(M_0) : \forall \varsigma \in L(N, M)$ esetén ς feltétlenül szigorúan pártatlan, ha $\forall t_j \in T : \#(\varsigma, t_j) = \infty$ vagy ς véges.
4. (N, M_0) Petri háló feltétlenül szigorúan pártatlan, ha $\forall M \in R(M_0) : \forall \varsigma \in L(N, M) : \varsigma$ feltétlenül szigorúan pártatlan.

3.1. Tétel. $2 \Rightarrow 4$

3.2. Tétel. Ha korlátos a háló és teljesül $4 \Rightarrow 2$ is teljesül.

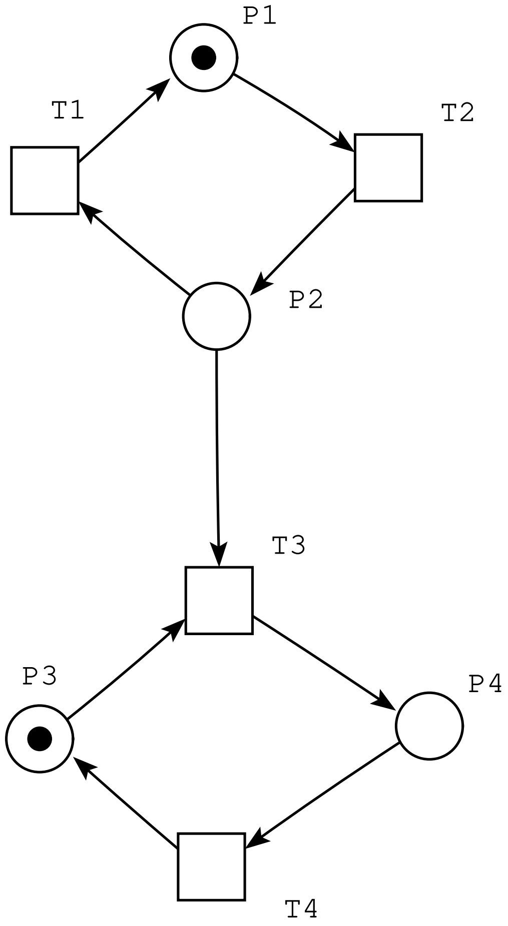
3.5. Példa. A 3.6. példa hálójára: 2. és 4. A 3.7. példa hálójára: se nem 2., se nem 4. $(t_2, t_1, t_2, t_1 ...)$. A 3.8. példa hálójára: 4. teljesül, de 2. nem (nem korlátos).

3.6. Példa. *(BLRBLR, MG,SM)*



korl(bizt),eleven,visszt.

3.7. Példa. *(BLRBlr, AC)*

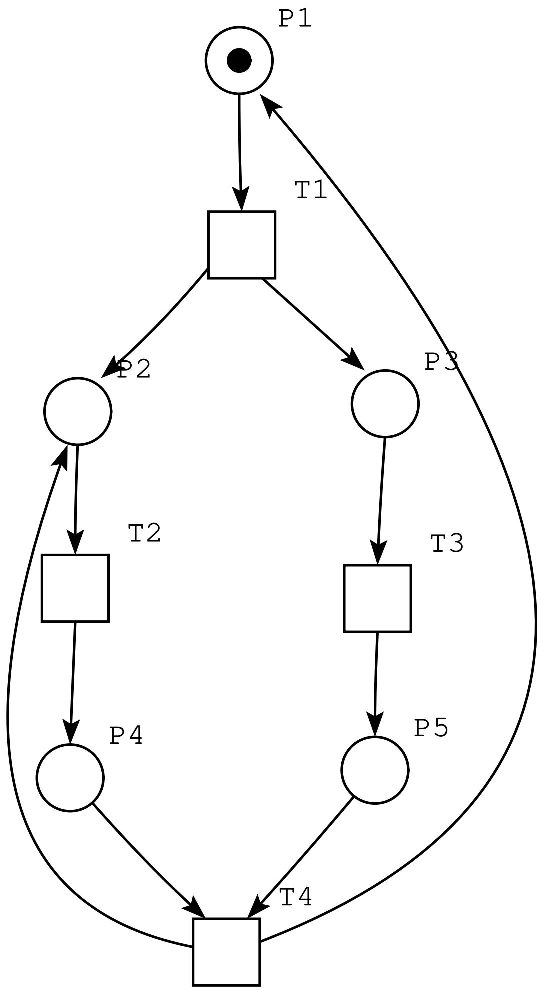


1–korl(bizt),nem eleven,nem visszt.

(t1,t2)(k),t3,t4

d(1,2)=d(3,4)=1,d(1,3)=!

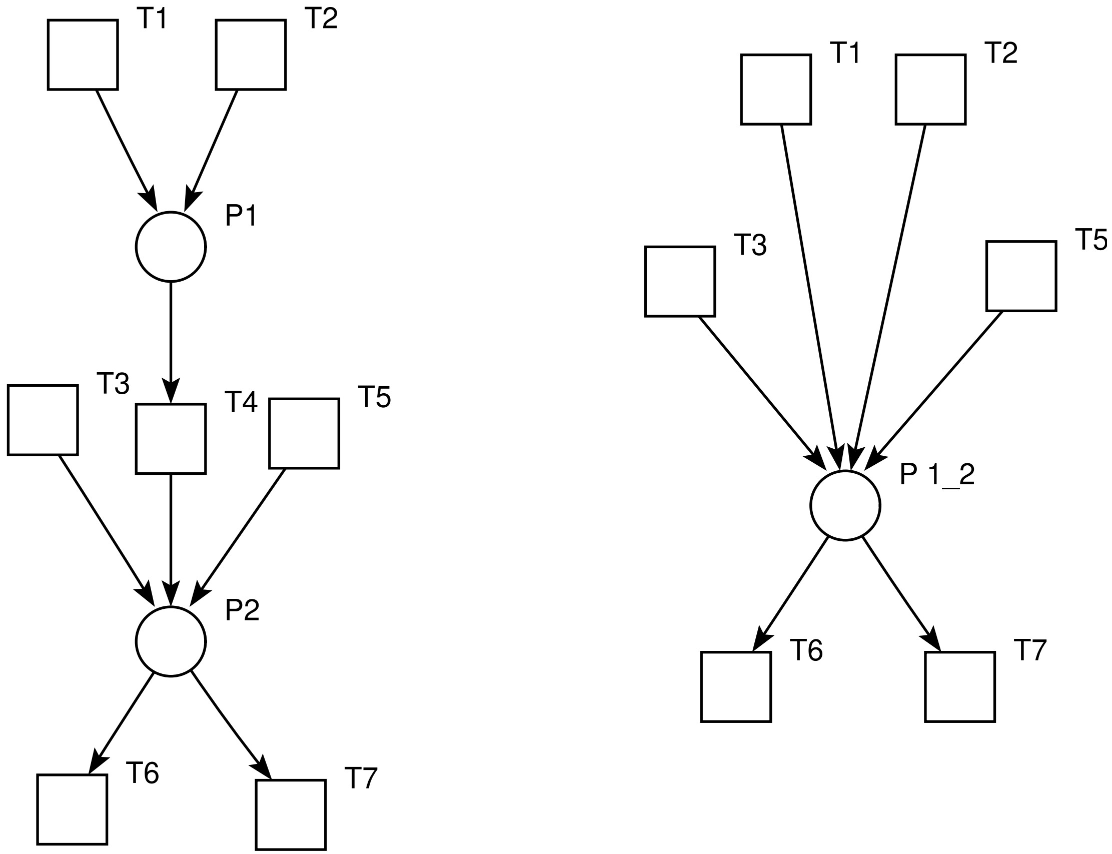
3.8. Példa. *(BLRbLr, megb., FC)*



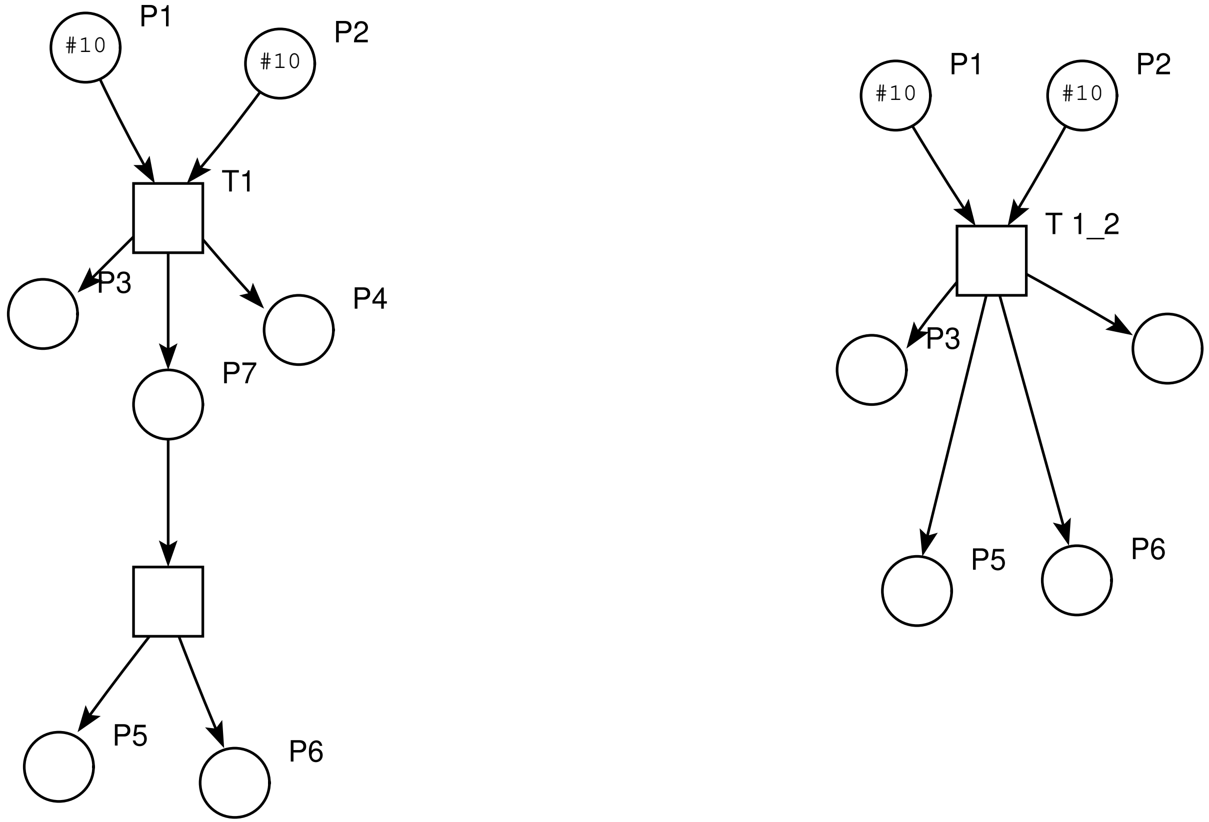
nem korl(P2),eleven,nem visszt.
megbízható (persistent)

Elevenséget, biztonságosságot és korlátosságot megőrző transzformációk.

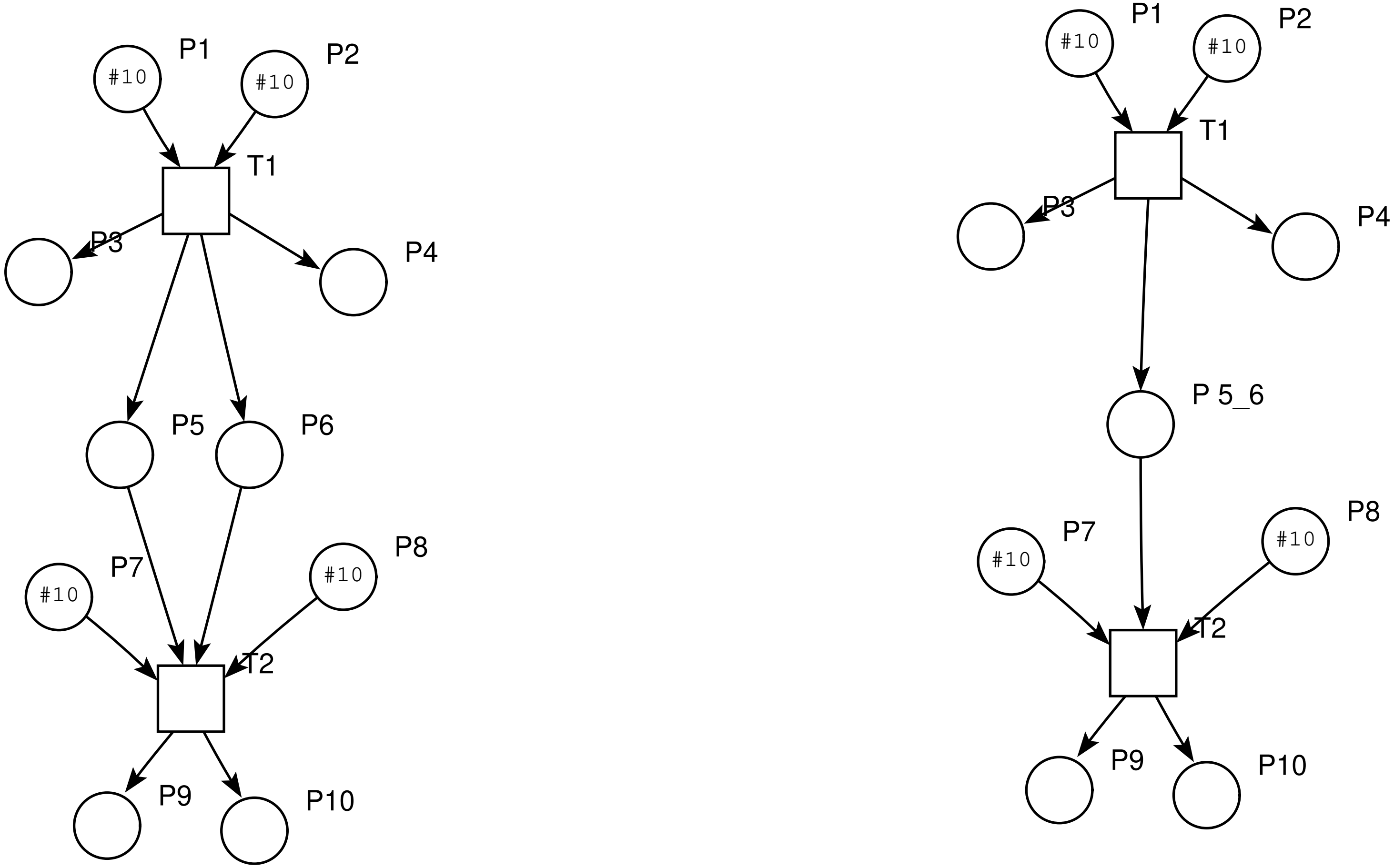
3.9. Példa. *(1. Helyek sorozatának összevonása:)*



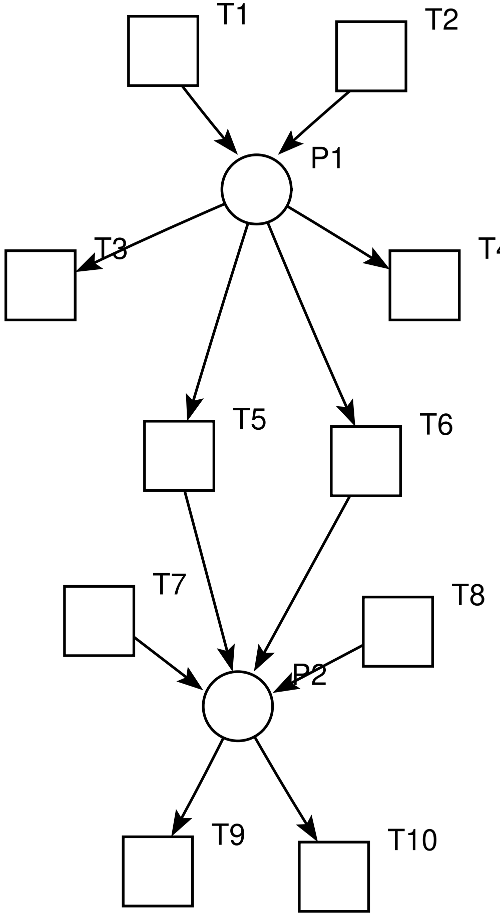
3.10. Példa. *(2. Átmenetek sorozatának összevonása:)*

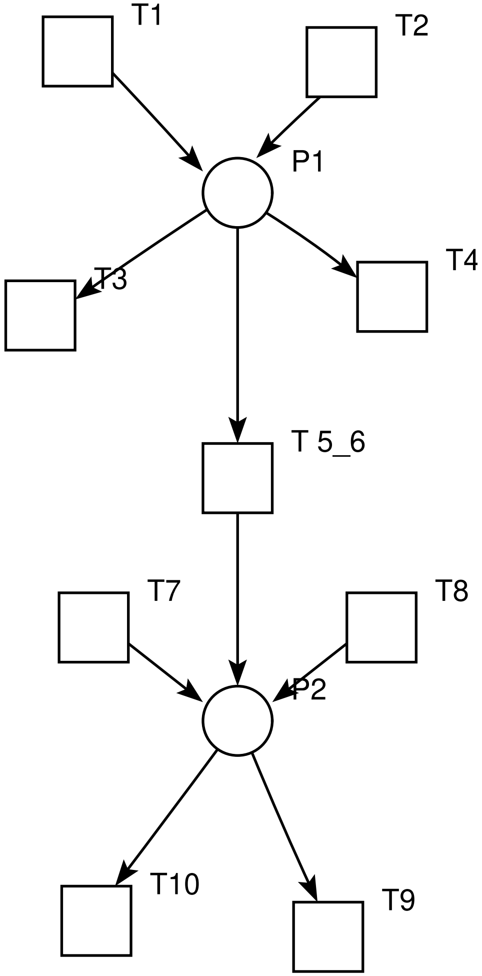


3.11. Példa. *(3. Párhuzamos helyek összevonása:)*

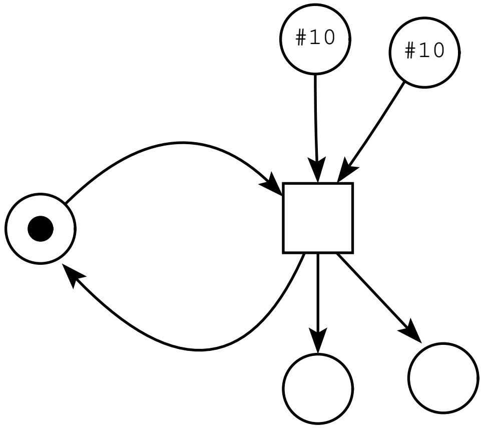


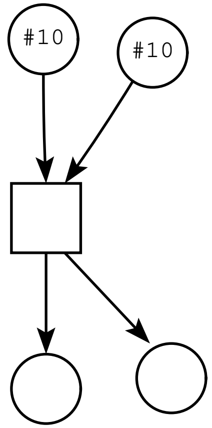
3.12. Példa. *(4. Párhuzamos átmenetek összevonása:)*



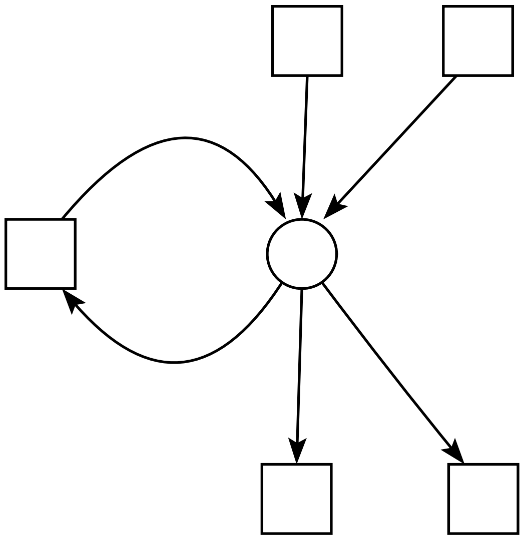


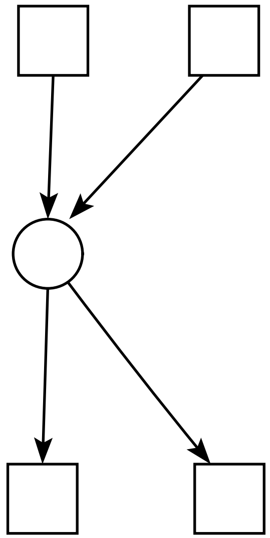
3.13. Példa. *(5. ”Hurok helyek” elhagyása:)*





3.14. Példa. *(6. ”Hurok átmenetek” elhagyása:)*





4. Petri hálók vizsgálata

4.1. Definíció. *(Elérhetőségi fa)*
(N, M_0) Petri háló elérhetőségi (végtelen esetben fedési) fája, olyan gráf, amelyben a csúcsok súlyozásokkal vannak címkézve, az élek pedig átmenetekkel.

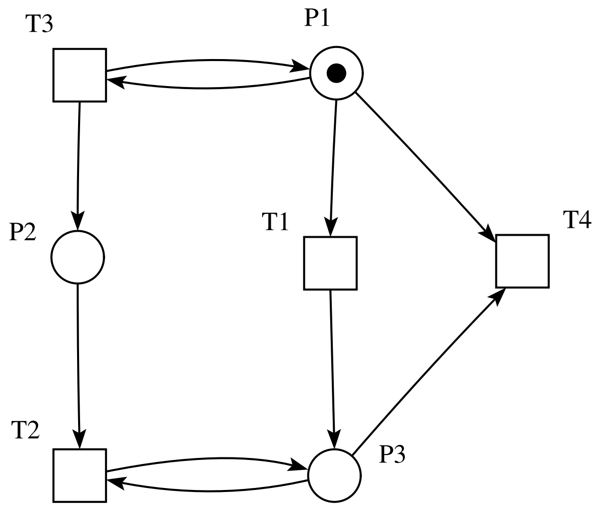
Konstrukció

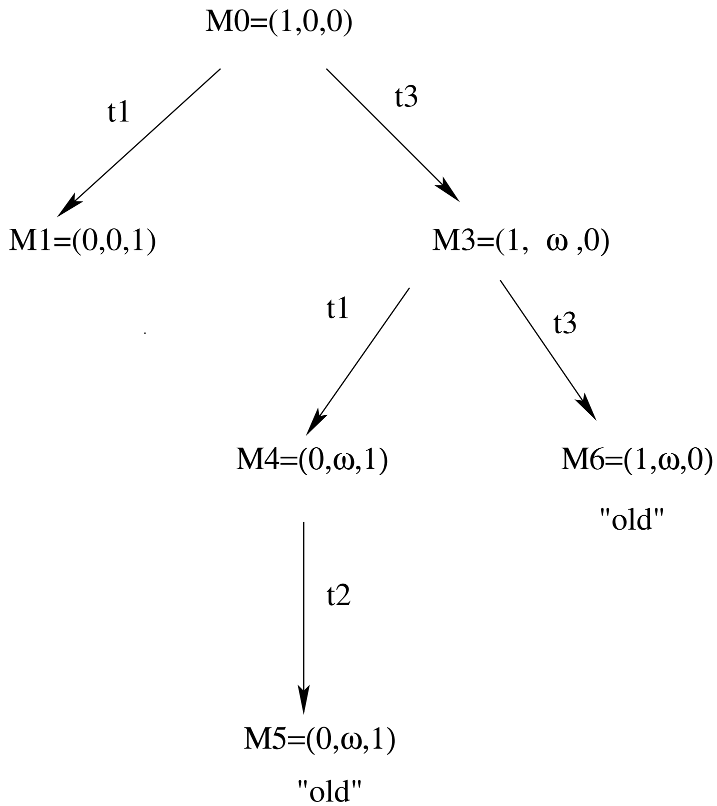
1. $M_0 : új := \{M_0\}$
2. ciklus, amíg $új \neq \emptyset$
   (a) $M :\in új, új := új \setminus \{M\}$
   (b) ha M -ig a gyökértõl létezik már M címkéjű csúcs $\Rightarrow M$ régi.
   (c) ha M -ben nincs aktivizálható átmenet $\Rightarrow M$ zsákutca.
   (d) M -ben $\forall t$ aktivizálható átmenetre kiszámoljuk MtM'-t.

i. Ha a gyökértõl M -ig $\exists M``$ : $M``$ -t lefedi $M`$ és $M` \neq M``$, akkor minden $p \in M`$ : $M`(p) > M``(p)$ helyre: $M`(p) := \omega$.

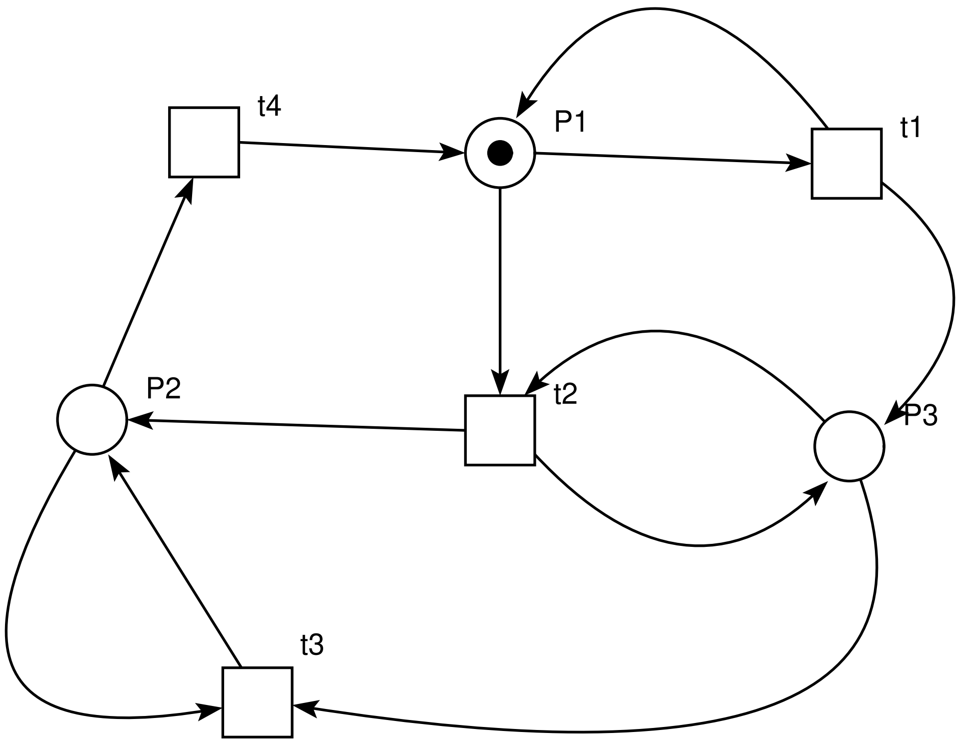
ii. $M`$ új csúcs: $új := új \cup \{M`\}$, az él címkéje t lesz.

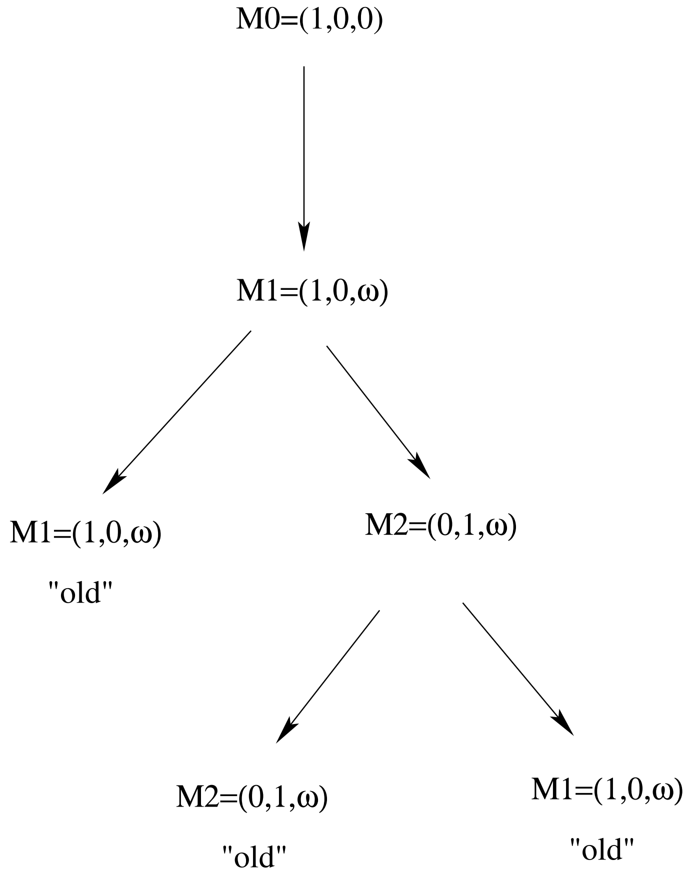
4.1. Példa. *(Fedési fa I.:)*



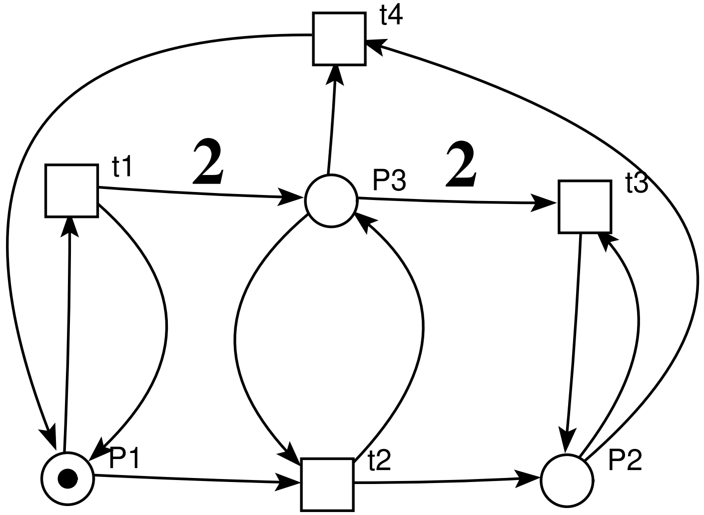


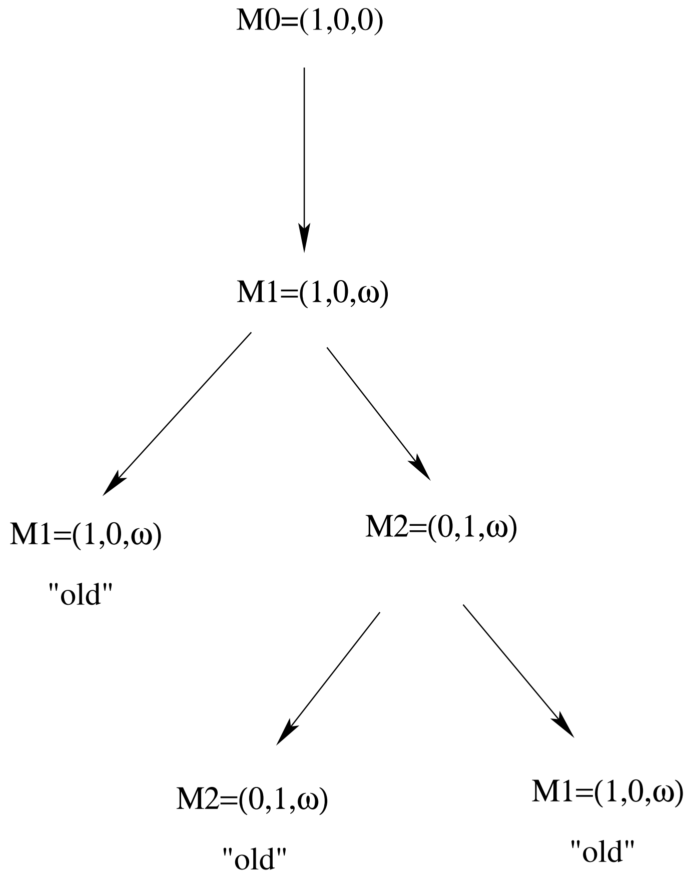
4.2. Példa. *(Fedési fa IIa.:)*





4.3. Példa. *(Fedési fa IIb.:)*





4.1. Tétel. Legyen G a (N, M_0) Petri háló lefedhetőségi fája.
- Korlátos a Petri háló $\Leftrightarrow$, ha nincs G -ben ∞ címkéjű csúcs.
- 1-korlátos (biztonságos) $\Leftrightarrow$ csak 0, 1 -es szám szerepel a címkékben.
- t holt (L_0 eleven) $\Leftrightarrow$ $\neg\exists t$ élcímke a G fedési fában.

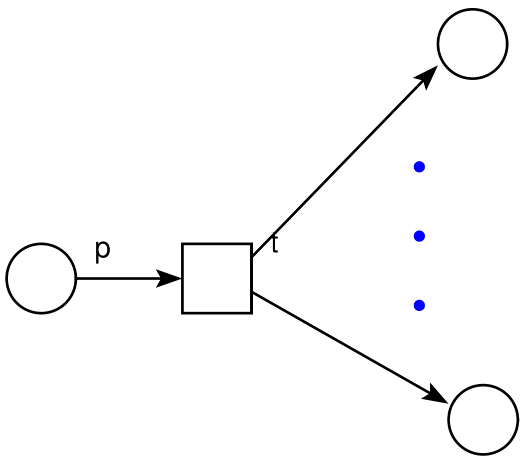
4.2. Tétel. $M \in R(M_0) \Rightarrow \exists M$‘ -vel címkézett csúcs, és M‘ lefedi M -et.

Megjegyzés Az azonos címkéjű helyek összevonásával a lefedhetőségi fából lefedhetőségi gráf készíthető.

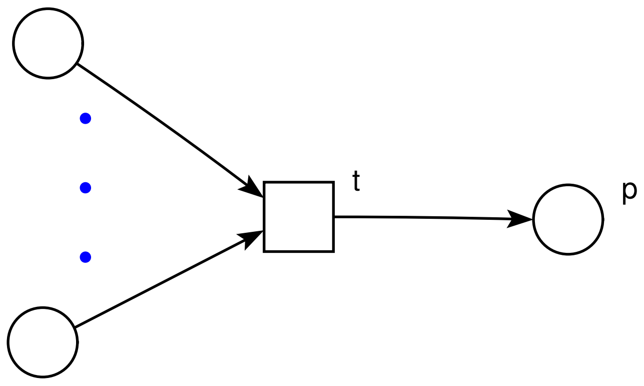
Eleven és biztonságos Petri hálók

Létezik-e olyan kezdő súlyozás, hogy a háló eleven és biztonságos?

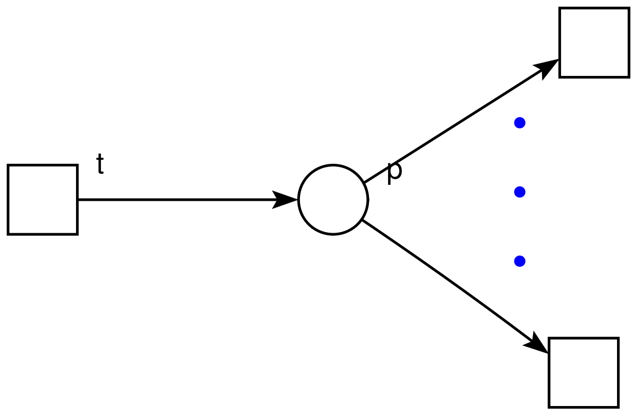
4.3. Tétel. 1. ${}^{\bullet}p = \emptyset \Rightarrow t$ nem eleven



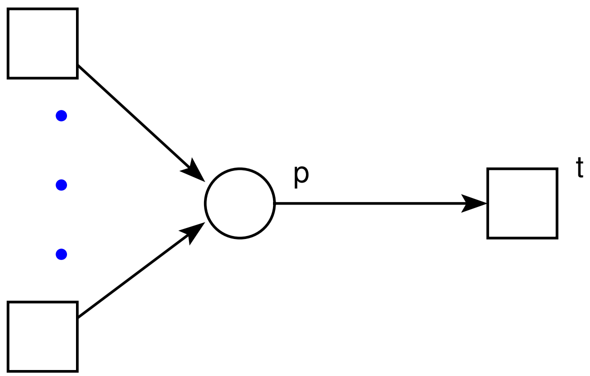
2. $p^{\bullet} = \emptyset \wedge t$ eleven $\Rightarrow p$ nem biztonságos



3. ${}^{\bullet}t = \emptyset \Rightarrow p$ nem biztonságos



4. $t^{\bullet} = \emptyset \wedge p$ biztonságos $\Rightarrow t$ nem eleven

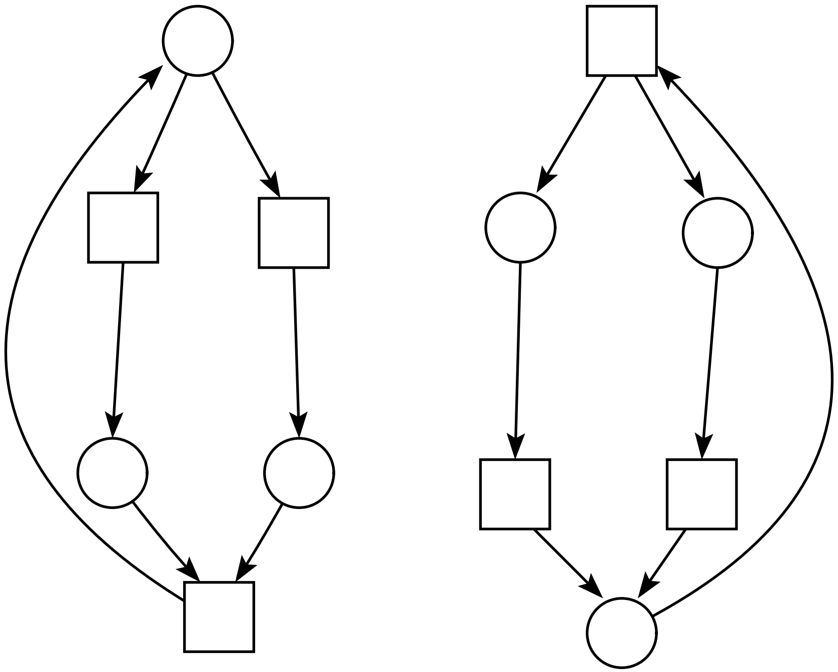


4.4. Tétel. Ha (N,M0) eleven és biztonságos $\Rightarrow \forall x \in P \cup T$: $x^\bullet \neq \emptyset \neq^\bullet x$

4.5. Tétel. Összefüggő, eleven és biztonságos háló erősen összefüggő.

4.1. Megjegyzés. Nem megfordítható.

4.4. Példa. *(Példa a nem megfordíthatóságra. Az első hálónak nincs olyan kezdősúlyozása, amely mellett eleven, a második hálónak nincs olyan nem teljesen üres kezdősúlyozása, amely mellett biztonságos.)*



Petri hálók osztályozása

4.2. Definíció. *(Állapotgép)*
$\forall t \in T : |{}^{\bullet}t| = |t^{\bullet}| = 1$

4.3. Definíció. *(Jelzett háló)*
$\forall p \in P : |{}^{\bullet}p| = |p^{\bullet}| = 1$

4.2. Megjegyzés. *()*
konfliktusmentesség $\not\Rightarrow$jelzett háló,
jelzett háló $\Rightarrow$perzisztens, ill.
perzisztens, biztonságos háló jelzett gráffá konvertálható.

4.4. Definíció. *(Szabad választású (FC))*
Szabad választású (FC) a háló, ha $\forall p \in P : |p^\bullet| \leq 1$ vagy $^\bullet(p^\bullet) = \{p\}$. Másképpen: $\forall p_1, p_2 : p_1^\bullet \cap p_2^\bullet \neq \emptyset \Rightarrow |p_1^\bullet| = |p_2^\bullet| = 1$

4.5. Definíció. *(Kiterjesztett szabad választású (EFC))*
Kiterjesztett szabad választású (EFC), ha $\forall p_1, p_2 : p_1^\bullet \cap p_2^\bullet \neq \emptyset \Rightarrow p_1^\bullet = p_2^\bullet$

4.6. Definíció. *(Asszimetrikusan választható (AC))*
Asszimetrikusan választható (AC), ha $\forall p_1, p_2 : p_1^\bullet \cap p_2^\bullet \neq \emptyset \Rightarrow p_1^\bullet \subseteq p_2^\bullet \vee p_2^\bullet \subseteq p_1^\bullet$

4.3. Megjegyzés. FC , EFC, ha $\exists p \in ({}^\bullet t_1 \cap {}^\bullet t_2) \Rightarrow \neg\exists M$:amelyikre csak az egyik megengedett, azaz szabad választású. EFC$\rightarrow$FC -re konvertálható.

4.7. Definíció. *(Szifon/holtpont)*
S helyek halmaza holtpont/szifon, ha ${}^\bullet S \subseteq S^\bullet$
(aki belerak, el is vesz belőle). Ha üres, üres is marad.

4.8. Definíció. *(Csapda)*
S helyek halmaza csapda, ha $S^\bullet \subseteq {}^\bullet S$
(aki elvesz, az rak is bele). Ha súlyozott, súlyozott is marad.

4.9. Definíció. Alap holtpont / csapda, ha nem más holtpontok / csapdák uniója. Minimális, ha valódi része nem az.

4.4. Megjegyzés. Csapdák, holtpontok uniója csapda, holtpont.

Állapotgép

4.10. Definíció. *(Állapotgép)*
$\forall t \in T : |{}^\bullet t| = |t^\bullet| = 1$

4.6. Tétel. Összefüggő állapotgép eleven $\Leftrightarrow$erősen összefüggő és van benne legalább egy súly.

4.7. Tétel. Összefüggő állapotgép binztonságos $\Leftrightarrow$ maximum 1 súly van benne.

4.8. Tétel. Összefüggõ állapotgép eleven és binztonságos $\Leftrightarrow$ pontosan 1 súly van benne és erõsen összefüggõ.

Jelzett gráf

4.11. Definíció. *(Jelzett háló)*
$\forall p \in P : |{}^\bullet p| = |p^\bullet| = 1$

Jelölés:

Jelzett gráfok esetén a helyeket ”beleolvasztjuk” a nyilakba. Az esetleges súlyt jelezni kell a nyilon.

4.9. Tétel. Jelzett gráf irányított körén a súlyösszeg invarináns, azaz $\forall M \in R(M_0) : \forall C : M_0(C) = M(C)$. Ahol a C az irányított kör élhalmaza.

4.1. Következmény. Erősen összefüggõ jelzett gráfban ha egy átmenet holt $\Rightarrow$ van egy olyan súlymentes irányított kör, amin rajta van.

4.10. Tétel. Erősen összefüggő jelzett gráf eleven $\Leftrightarrow$ minden irányított körén legalább egy súly található.

4.11. Tétel. *(Mini-max tétel)*
Egy él maximális súlya egy jelzett gráfban megegyezik a legkissebb súlyt tartalmazó, rajta áthaladó irányított kör súlyával.

Biz: Jelöljük C_1,...C_m-mel az e élen átmenő köröket, és e_1,...e_m-mel az e előtti éleket.
Mindegyik e előtti élre tegyük a maximális súlyt. Ekkor $e = (x, y)$ élre x (az e előtti átmenet) ezen súlyok minimumaszor tüzelhet anélkül, hogy y tüzelne.

4.12. Tétel. Eleven jelzett háló
biztonságos $\Leftrightarrow$ $\forall$csúcshoz $\exists$ C kör, amin rajta van és $M_0(C) = 1$.

4.13. Tétel. Jelzett hálónak
létezik eleven és bizonságos súlyozása $\Leftrightarrow$ erősen összefüggõ.
Biz: $\Rightarrow$: volt (4.5).
$\Leftarrow$: tegyünk minden irányított körre minimum 1 súlyt, ha $\exists M \in R(M_0) : M(e) \geq 2$, akkor vegyünk el egy súlyt: $M`(e) = 1$. Ezt folytassuk, amíg minden körön pontosan egy súly marad.

4.12. Definíció. E' visszcsatoló élhalmaz (VÉH) a $G(V, E)$ gráfban, ha $G‘ = (V, E - E')$ körmentes.

4.13. Definíció. VÉH minimális, ha nincs VÉH részhalmaza.

4.14. Definíció. VÉH minimum, ha nincs kisebb elemszámú VÉH.

4.5. Megjegyzés. VÉH nem feltétlenül egyértelmû.

4.14. Tétel. Eleven jelzett gráf nem nulla súlyú éleinek halmaza VÉH.

Ha egy jelzett gráf valamely VÉH-ának minden eleme súlyozott $\Rightarrow$eleven a gráf (4.10).

4.15. Tétel. Egy erősen összefüggő eleven jelzett gráf biztonságos $\Leftrightarrow \forall M \in R(M0)$: a súlyozott élek halamza minimális VÉH.

Biz: 4.13. tétel szerint nincs több eltávolítható súly.

4.6. Megjegyzés. Van legkissebb VÉH, hogy súlyozása nem biztonságos.

Elevenség és bizontságosság FC, AC hálókban

4.16. Tétel. *(FC háló elevensége)*
Egy FC háló
eleven $\Leftrightarrow$ Minden szifon tartalmaz súlyozott csapdát.

4.17. Tétel. *(Eleven FC háló biztonságossága)*
Eleven FC háló
biztonságos $\Leftrightarrow$ lefedhető olyan erősen összefüggő állapotgépekkel, amelyeknek mindegyikében pontosan 1 súly van.

4.18. Tétel. *(Eleven FC háló lefedhetősége (MG))*
Eleven és biztonságos (N, M_0) FC háló lefedhető erősen összefüggő jelzett gráfokkal. $\exists M \in R(M_0)$: $\forall (N_i, M_i)$ komponens jelzett gráf eleven és biztonságos, ahol M_i az M megszorítása N_i-re.

4.19. Tétel. *(AC háló elevensége)*
AC háló eleven akkor (de nem csak akkor), ha minden szifon tartalmaz súlyozott csapdát.

4.15. Definíció. *(Állapotgép (SM) komponens)*
Az $N_1 = (P_1, T_1)$ Petri háló az $N = (P, T)$ hálóból a $P_1 \subseteq P$ helyhalmaz által generált állapotgép komponens, ha N_1 a legkisebb olyan Petri háló, amelyre igaz, hogy

1.$\forall t \in T_1$ átmenetnek legfeljebb 1-1 ki-, illetve bemenő éle van és

2. tartalmaz minden P_1-beli helyet, az összes megelőző és rákövetkező átmenetet és az összekötő éleket.

4.7. Megjegyzés. *(Jelzett gráf komponens)*
Ennek duálisa: jelzett gráf komponens.

Petri dobozok

A Lab halmaz események egy előre megadott halmaza.

4.16. Definíció. *(Átcímkézés)*
ρ átcímkézés egy reláció:
$\rho \subseteq (mult(Lab)) \times Lab$, úgy, hogy $(\emptyset, \alpha) \in \rho$ akkor és csak akkor, ha $\rho = \{(\emptyset, \alpha)\}$.

Speciális átcímkézések:
konstans átcímkézés: $\rho_\alpha = \{(\emptyset, \alpha)\}$
megszorítás: $\rho_{Lab'} = \{(\{\alpha\}, \alpha) | \alpha \in Lab'\}$, csak a $Lab' \subset Lab$ beli eseményeket tartja meg.
identitás: $\rho_{id} = \{(\{\alpha\}, \alpha) | \alpha \in Lab\}$

4.17. Definíció. *(Címkézett Petri háló)*
$\mathbf{\Sigma} = (S, T, W, \lambda, M)$, ahol S a helyek, T az átmenetek halmaza, W az éleket leíró reláció, λ a címkefüggvény, M pedig a súlyozás.
$S \cap T = \emptyset$,
$W : ((S \times T) \cup (T \times S)) \to \mathbf{N}_0$,
$\forall s \in S : \lambda(s) \in \{e, i, x\}$,
$\forall t \in T : \lambda(t)$ egy átcímkézés,
$M : S \times \mathbf{N}_0$

4.18. Definíció. *(Esemény előfordulási száma - zsákfüggvény)*

$\mu : A \longrightarrow \mathcal{N}_0$. $mult(A) = \{\mu | \mu : A \to \mathbf{N}_0 \}$. A zsákfüggvény megadja, hogy melyik elemből mennyi van a zsákban.

4.5. Példa. μ jelölje a $\{aabccc\}$ zsákot, ekkor $\mu(a) = 2, \mu(b) = 1, \mu(c) = 3$.

4.19. Definíció. *(Párokat definiáló függvény)*
$\wedge : A \to A : a \neq \widehat{a}$, bijekció, $\wedge =\wedge^{(-1)}$, párokat definiál A felett.

Jelölés: Legyen adott egy A eseményhalmaz és egy $\wedge$ párokat definiáló függvény A felett.
$\widehat{\mu}(a) ::= \mu(\widehat{a})$.

$\Sigma h(a) = \Sigma\mu(a) * h(a)$,
$\cup(\mu_1, \mu_2) = \text{max} \circ (\mu_1, \mu 2)$,
$\cap(\mu_1, \mu_2) = \text{min} \circ (\mu_1, \mu 2)$,
$\mu_1 + \mu_2 = + \circ (\mu_1, \mu 2)$,
$\mu_1 - \mu_2 =$ különbség vagy 0,

4.20. Definíció. *(Elnevezések)*

$\Sigma = (S, T, W, \lambda, M)$. Legyen $s \in S$. Ha
$\lambda(s) = e$ (entry), akkor s belépési hely,
$\lambda(s) = x$ (exit), akkor s kimenő hely,
$\lambda(s) = i$ (internal), akkor s belső hely,

${}^\bullet\Sigma = \{s \in S | \lambda(s) = e\}$ bemenő helyek

$\Sigma^\bullet = \{s \in S | \lambda(s) = x\}$ kimenő helyek

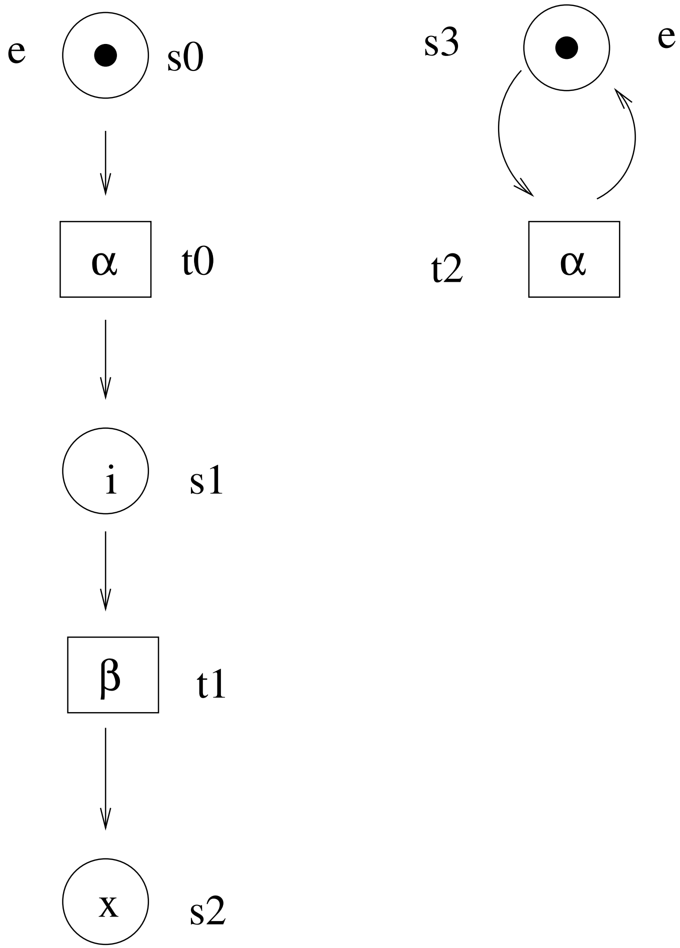
$\ddot{\Sigma} = \{s \in S | \lambda(s) = i\}$ belső helyek

Egy címkézett petri háló

$\Sigma_0 = (S_0, T_0, W_0, \lambda_0, M_0)$
$S_0 = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$
$T_0 = \{t_0, t_1, t_2\}$
$W_0 = ((TS \cup ST)\times\{1\}) \cup (\ ((S\times T) \setminus ST \ \cup \ (T\times S) \setminus TS) \times \{0\}\ )$
$\lambda_0 = \{(s_0, e), (s_1, i), (s_2, x), (s_3, e), (t_0, \alpha), (t_1, \beta), (t_2, \alpha)\}$
$M_0 = \{(s_0, 1), (s_1, 0), (s_2, 0), (s_3, 1)\}$
ahol
$TS = \{(t_0, s_1), (t_1, s_2), (t_2, s_3)\}$ és $ST = \{(s_0, t_0), (s_1, t_1), (s_3, t_2)\}$

4.6. Példa. *(Σ_0)*

Σ_0



Lépés szekvencia

4.21. Definíció. *(Lépés)*
$\Sigma = (S, T, W, \lambda, M)$
Átmenetek egy véges zsákja $U \in mult(T)$, (egy lépés) engedélyezett Σ-ban, ha minden $s \in S$ helyre:
$M(s) \geq \sum_{t \in U} U(t) * W(s,t)$, azaz minden helyen van elég súly ahhoz, hogy szimultán végre tudjuk hajtani az összes U-beli átmenetet.

4.22. Definíció. *(Lépés végrehajtása)*

$$\forall s \in S : M'(s) = M(s) + \sum_{t \in U} U(t) * (W(t,s) - W(s,t))$$

Jelölés: $M\,[U > M'$, vagy $\Sigma\,[U > \Theta$, ahol

$\Theta = (S, T, W, \lambda, M')$

4.23. Definíció. *(Véges lépéssorozat)*
$\sigma = U_1...U_k$ egy véges lépéssorozat Σ-ban, ha létezik $\Sigma_0, ..., \Sigma_k$ címkézett háló, úgy, hogy $\Sigma = \Sigma_0$ és $\forall i \in [1..k] : \Sigma_{i-1} [U_i > \Sigma_i$
Jelölés: $\Sigma [\sigma > \Sigma_k$, vagy $M_\Sigma [\sigma > M_{\Sigma_k}$
Elnevezés: M_{Σ_k} súlyozás *elérhető* M_Σ-ból ($M_{\Sigma_k} \in [M_\Sigma >$), és Σ_k *származtatható* Σ-ból ($\Sigma_k \in [\Sigma >$)

Megjegyzés: Egy háló akkor tartalmaz önkonkurenciát, ha megenged olyan lépéssorozatot, amely nem átmenethalmazok sorozata (azaz a sorozat lépéseinek valamelyike valódi zsák).

Példa:

Σ_0-ban (előző órai példa) t_0 és t_2 konkurensen engedélyezett, így $\{t_0, t_2\}$ egy engedélyezett lépés. Miután ezt a lépést végrehajtjuk t_1 és t_2 konkurensen végrehajthatóvá válik, így a $\{t_0, t_2\}\{t_1, t_2\}$ egy lépéssorozata Σ_0-nak.

Megjegyzés: Egy lépés nem kell maximális legyen, például $\{t_0\}$ is egy lépése, illetve $\{t_0\}\{t_1\}\{t_2\}\{t_2\}$ és $\{t_0, t_2\}\{t_1\}\{t_2\}$ is egy lépéssorozata Σ_0-nak.

4.24. Definíció. *(T-megszorítás:)*
$\forall t \in T : {}^\bullet t \neq \emptyset \neq t^\bullet$
(Ezt a továbbiakban minden hálóra feltesszük.)

4.25. Definíció. *(ex-megszorítás:)*
${}^\bullet\Sigma \neq \emptyset$ és $\Sigma^\bullet \neq \emptyset$,
azaz létezik legalább egy belépési és egy kilépési hely.

4.26. Definíció. *(e-irányított háló)*
Σ e-irányított, ha
$\forall s \in^{\bullet} \Sigma : \forall t : W(t, s) = 0$,
azaz a belépési helyekhez nem vezet él.

4.27. Definíció. *(x-irányított háló)*
Σ x-irányított, ha
$\forall s \in \Sigma^{\bullet} : \forall t : W(s, t) = 0$,
azaz a kilépési helyekből nem vezet ki él.

4.28. Definíció. *(ex-irányított háló)*
Σ ex-irányított, ha e-irányított és x-irányított.

4.29. Definíció. *(ex-kizárólagos)*

Legyen

$$\forall s \in S : M_{\bullet\Sigma}(s) = \begin{cases} 1 & \text{ha } s \in^{\bullet} \Sigma \\ 0 & \text{ha különben} \end{cases}$$

$$\forall s \in S : M_{\Sigma^\bullet}(s) = \begin{cases} 1 & \text{ha } s \in \Sigma^{\bullet} \\ 0 & \text{ha különben} \end{cases}$$

Σ ex-kizárólagos, ha minden M_Σ-ból,
vagy $M_{\bullet\Sigma}$-ból, vagy $M_{\Sigma^\bullet}$-ból
elérhető M súlyozásra $M \cap M_{\bullet\Sigma} = \emptyset$ vagy $M \cap M_{\Sigma^\bullet} = \emptyset$,
azaz, ha nem lehetséges súlyt tenni egyszerre egy belépési és egy kilépési helyre.

Példa: Σ_0 háló ex-megszorított és x-irányított, de nem e-irányított és nem ex-kizárólagos.

4.30. Definíció. *(ex-asszimetrikus átmenet)*
Egy $t \in T$ átmenet ex-asszimetrikus, ha
$^\bullet t \cap {}^\bullet\Sigma \neq \emptyset \neq {}^\bullet t \cap \Sigma^\bullet$ vagy $t^\bullet \cap {}^\bullet\Sigma \neq \emptyset \neq t^\bullet \cap \Sigma^\bullet$
Megjegyzés: Ha egy címkézett háló tartalmaz egy ex-asszimetrikus t átmenetet, akkor ex-megszorított, de nem ex-irányított, és ha t végrehajtható, akkor a háló nem ex-kizárólagos.

4.31. Definíció. *(Függetlenség (independence) reláció)*
$ind_{\Sigma} = \{(t,u) \in T \times T | ({}^{\bullet}t \cup t^{\bullet}) \cap ({}^{\bullet}u \cup u^{\bullet}) = \emptyset\}$

Megjegyzés: Ha Σ biztonságos, akkor bármely két átmenet, amely megjelenik egy lépésben *független* a fenti definíció szerint.

4.32. Definíció. *(Súlyozást módosító műveletek)*
Legyen $\Sigma = (S, T, W, \lambda, M)$

$\lfloor \Sigma \rfloor = (S, T, W, \lambda, \emptyset)$

$\overline{\overline{\Sigma}} = (S, T, W, \lambda, M\bullet_{\Sigma})$

$\underline{\underline{\Sigma}} = (S, T, W, \lambda, M_{\Sigma}\bullet)$

4.33. Definíció. *(Petri doboz)*
Σ címkézett Petri háló *Petri doboz*, ha *ex-megszorított* valamint *ex-irányított* (és T *megszorított*).

4.34. Definíció. *(Sima doboz)*
Σ Petri doboz *sima doboz*, ha minden $t \in T_{\Sigma}$ átmenetre a $\lambda_{\Sigma}(t)$ egy konstans átcímkézés.

4.35. Definíció. *(Tiszta súlyozás)*
Egy M súlyozás tiszta, ha nem valódi szuper-zsákja $M{\bullet}_{\Sigma}$-nak és $M_{\Sigma}{\bullet}$-nak, azaz, ha $M{\bullet}_{\Sigma} \subseteq M$, akkor $M{\bullet}_{\Sigma} = M$, valamint ha $M_{\Sigma}{\bullet} \subseteq M$, akkor $M_{\Sigma}{\bullet} = M$.

4.36. Definíció. *(Statikus doboz)*
Egy Σ súlyozatlan sima doboz *statikus doboz*, ha minden $M_{\bullet\Sigma}$-ból és $M_{\Sigma\bullet}$-ból elérhető súlyozás biztonságos és tiszta.

4.37. Definíció. *(Dinamikus doboz)*
Egy Σ súlyozott sima doboz *dinamikus doboz*, ha minden M_{Σ}-ból, $M_{\bullet\Sigma}$-ból és $M_{\Sigma\bullet}$-ból elérhető súlyozás biztonságos és tiszta.

Megjegyzés Ha Σ egy statikus doboz és Θ származtatható $\overline{\Sigma}$-ból, akkor Θ egy dinamikus doboz (azaz speciálisan $\overline{\Sigma}$ maga is egy dinamikus doboz).
Ugyanakkor az utolsó definíció nem követeli meg, hogy M_{Σ} elérhető legyen $M_{\bullet\Sigma}$-ból vagy $M_{\Sigma\bullet}$-ból, ha mégis az, akkor a definícíóban az M_{Σ}-ra vonatkozó rész elhagyható.

Dobozok két speciális osztálya: *belépési* és *kilépési* dobozok, olyan dinamikus dobozok, amelyeknél a súlyozás megegyezik $M_{\bullet\Sigma}$-val, illetve $M_{\Sigma\bullet}$-val. (A dinamikus dobozok halmaza tartalmazza a *belépési* és *kilépési* dobozok halmazát.)

Jelölések:

Statikus dobozok halmaza: Box^s,

Dinamikus dobozok halmaza: Box^d,

Belépési dobozok halmaza: Box^e,

Kilépési dobozok halmaza: Box^x,

Sima dobozok halmaza: Box

4.20. Tétel. Legyen Σ egy dinamikus doboz és U egy engedélyezett lépés Σ-ban. Ekkor

1. minden Σ-ból elérhető címkézett háló egy dinamikus doboz,
2. U kölcsönösen független átmenetek egy halmaza: $U \times U \subseteq ind_{\Sigma} \cup id_{T_{\Sigma}}$, ahol $id_X = \{(x,x)|x \in X\}$ minden X halmazra,
3. és minden U-hoz kapcsolodó él egyszeres: $W_{\Sigma}(U \times S_{\Sigma}) \cup W_{\Sigma}(S_{\Sigma} \times U) \subseteq \{0,1\}$.

4.38. Definíció. *(Operátor doboz)*

A nem konstans átcímkézéseket transzformációs átcímkézésnek nevezzük.

Egy Ω operátor doboz olyan doboz, melynek minden átmenetéhez transzformációs átcímkézés van rendelve.

Legyen $\Sigma : T_\Omega \to Box$ egy az Ω átmeneteiről a sima dobozok halmazára képező függvény .
Σ-t "$\Omega - n - es$"-nek fogjuk nevezni.

$\forall v \in T_\Omega$-ra $\Sigma(v)$-t Σ_v-vel jelöljük.
Ha Ω átmenethalmaza véges, akkor feltesszük, hogy $T_\Omega = \{v_1, ..., v_n\}$ egy tetszőleges, de fix rendezés az átmenethalmazon és ekkor a $\Sigma = \{\Sigma_{v_1}, ..., \Sigma_{v_n}\}$ vagy a $\Sigma = \{\Sigma_1, ..., \Sigma_n\}$ jelölést használjuk.

Megjegyzés: Az operátor dobozt úgy képzelhetjük el, mint egy mintát, amely sima dobozok egy halmazát (átmenetenként egyet) köt össze a belépési és a kilépési helyeiken keresztül.

4.39. Definíció. *(Komplex súlyozás)*

Egy Ω operátor doboz komplex súlyozása egy $\mathcal{M} = (M, Q)$ pár, ahol M egy szabványos súlyozás, Q pedig Ω-beli *aktív* átmenetek egy véges zsákja.
M-et az $\mathcal{M}$ súlyozás *valós* részének, míg Q-t a *képzetes* részének nevezzük.
Egy szabványos M súlyozást az $(M, \emptyset)$ komplex súlyozással lehet reprezentálni.

Megjegyzés A komplex súlyozás azért hasznos operátor dobozok esetén, mert a doboz átmeneteinek megfelelő sima dobozok nagyon összetettek is lehetnek, így a végrehajtásuk sok, (akár végtelen) időt is igénybe vehet. (Holtpont, végtelen ciklus.)

4.40. Definíció. *(Kiterjesztett definiciók)*

Egy U lépés engedélyezett az $\mathcal{M} = (M, Q)$ súlyozás mellett, ha M mellett engedélyezett. Ezt $\mathcal{M}[U>$ -val jelöljük.

Egy engedélyezett U lépés válhat (teljesen) *végrehajtottá*: $\mathcal{M}[U> \mathcal{M}'$, ahol $\mathcal{M}' = (M', Q)$, úgy, hogy

$$\forall s \in S: \; M'(s) = M(s) + \sum_{t \in U} U(t) * (W(t,s) - W(s,t)).$$

Egy engedélyezett U lépés válhat *aktívvá*:
$\mathcal{M}[U^{+}>\mathcal{M}'$, ahol $\mathcal{M}'=(M',Q+U)$, úgy, hogy

$$\forall s\in S:\;\; M'(s)=M(s)-\sum_{t\in U}U(t)*W(s,t).$$

Valamint egy $U\subseteq Q$ aktív lépés bármikor *befejezetté* válhat:
$\mathcal{M}[U^{-}>\mathcal{M}'$, ahol $\mathcal{M}'=(M',Q-U)$, úgy, hogy

$$\forall s\in S:\;\; M'(s)=M(s)+\sum_{t\in U}U(t)*W(t,s).$$

Általánosan a fenti három esetet együtt a következőképpen jelöljük:

$\mathcal{M}[U : V^{+} : Y^{-} > (M', Q')$, ha $Y \subseteq Q$, $Q' = Q + V - Y$ és $\forall s \in S$:

$$M(s) \geq \sum_{t \in U+V} (U(t) + V(t)) * W(s,t)$$

$$\begin{aligned} M'(s) = M(s) &+ \sum_{t \in U+Y} (U(t) + Y(t)) * W(t,s) \\ &- \sum_{t \in U+V} (U(t) + V(t)) * W(s,t) \end{aligned}$$

Jelölés: Az $\mathcal{M}$-ből elérhető komplex súlyozásokat $[\mathcal{M}>$-el jelöljük.

4.41. Definíció. *(Kiterjesztett definiciók II.)*
Egy $\mathcal{M} = (M, Q)$ komplex súlyozás *biztonságos, k-korlátos* és *tiszta*, ha megfelelően M biztonságos, k-korlátos és tiszta.

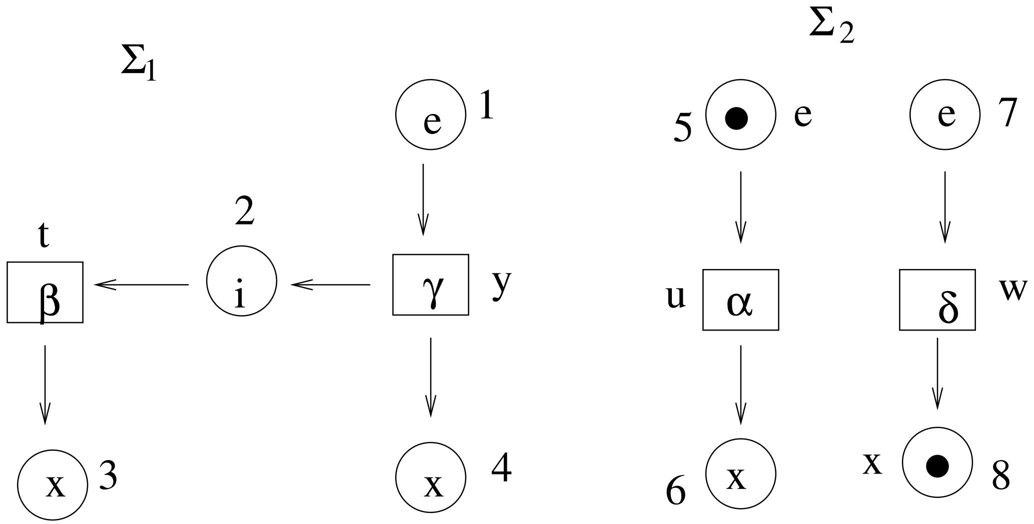
Megjegyzés: Ha Ω egy $\mathcal{M} = (M, Q)$ komplex súlyozású operátor doboz, akkor a doboz által definiált kompozíciós művelet sima dobozok bármely Σ $\Omega - n$-esére alkalmazható feltéve, hogy Σ_v akkor és csak akkor súlyozott, ha $v \in Q$.

4.42. Definíció. *(Interface váltás)*
Legyen Ω egy operátor doboz és Σ egy $\Omega - n$-es. A Σ-ra vonatkozó Ω szerinti *interface váltás* azt jelenti, hogy minden Σ-beli Σ_v-re végrehajtjuk a megfelelő v átmenet $\lambda_\Omega(v)$ átcímkézése által meghatározott interface váltást.

Egy adott Σ_v-re vonatkozó $\rho_v = \lambda_\Omega(v)$ szerinti interface váltást úgy kapjuk meg, hogy megvizsgáljuk a Σ_v-beli átmenetek által képzett halmazokat, és megnézzük, hogy az ezek által meghatározott címkezsákok közül melyek szerepelnek a ρ_v átcímkézés értelmezési tartományában. Ha találunk ilyen átmenethalmazt, akkor az ebbe tartozó átmeneteket összevonjuk egyetlen átmenetté és a ρ_v által a cimkezsákhoz rendelt cimkét rendeljük ehhez az összevont átmenethez.

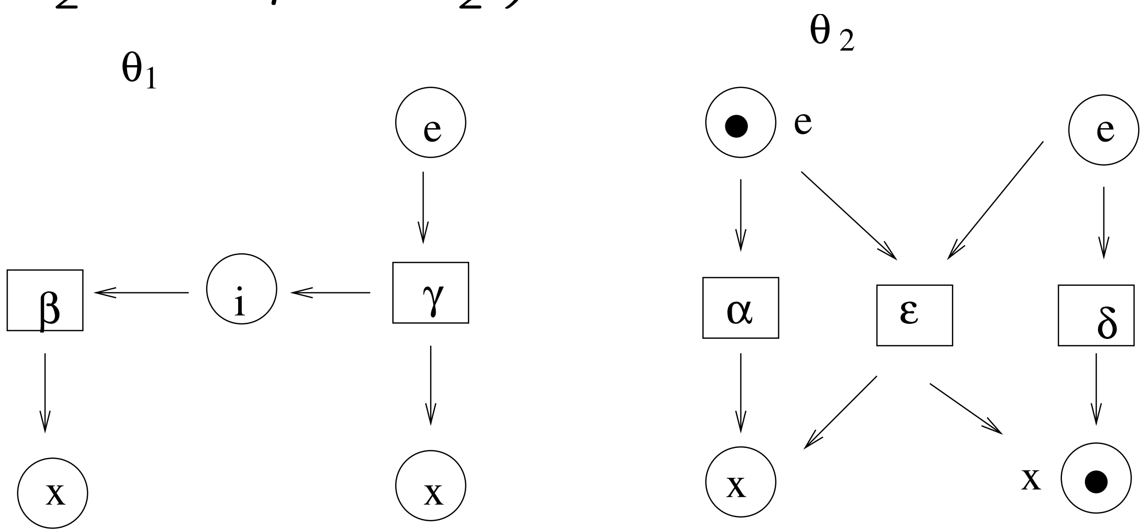
Például, legyenek t, u és w Σ_v-beli átmenetek úgy, hogy a hozzájuk rendelt cimkék zsákja $\{\lambda_{\Sigma_v}(t), \lambda_{\Sigma_v}(u), \lambda_{\Sigma_v}(w)\}$ benne van ρ_v értelmezési tartományában.
Azaz például $(\{\lambda_{\Sigma_v}(t), \lambda_{\Sigma_v}(u), \lambda_{\Sigma_v}(w)\}, \alpha) \in \rho_v$, akkor t, u, w-ből létrehozunk egy összevont átmenetet, amit α-val címkézünk.

4.7. Példa. *(Σ_1 és Σ_2)*



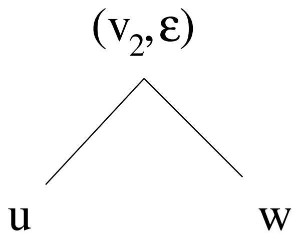
Legyen az operátordoboz két átmenetéhez rendelt átcímkézés: $\rho_1 = \rho_{id}$ (ezt használjuk majd Σ_1-hez), $\rho_2 = \rho_{id} \cup \{(\{\alpha, \delta\}, \epsilon)\}$ (ezt használjuk majd Σ_2-hőz).

4.8. Példa. *(Az interfaceváltás után Σ_1-ből kapott Θ_1, illetve Σ_2-ből kapott Θ_2.)*



Megjegyzés: Az újonnan létrehozott átmenetek egyedi azonosítása érdekében az átmenetek elnevezésére címkézett fákat használunk, amelyek megmutatják, hogy az adott átmenet hogyan jött létre.

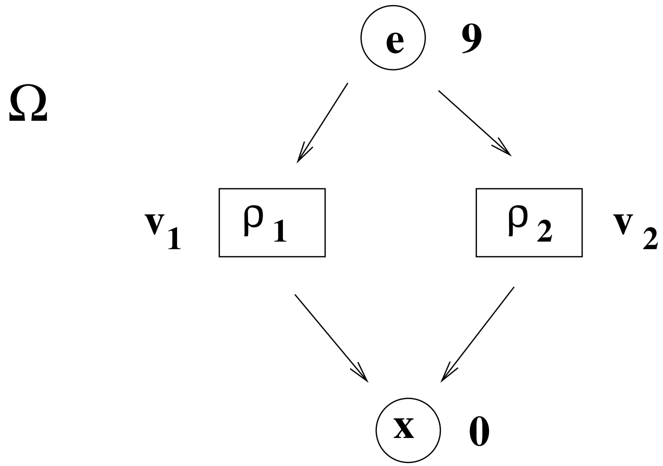
4.9. Példa. *(Az előző példában létrehozott ϵ címkéjü csúcs elnevezése.)*



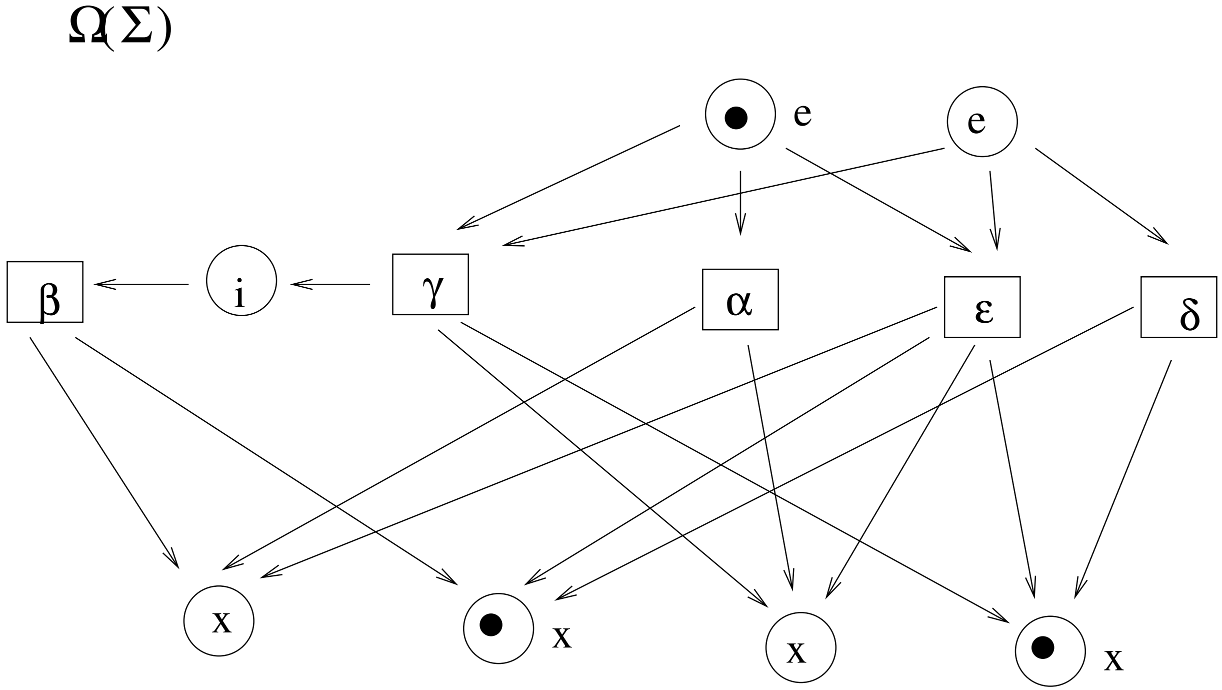
4.43. Definíció. *(Átmenet finomítás)*
Legyen Ω egy operátor doboz, Σ pedig egy $\Omega - n$-es. Ω minden helyére vizsgáljuk meg a megelőző és rákövetkező átmeneteket. Vegyük az összes lehetséges módon a megelőző átmenetek kilépési helyeit, illetve a rákövetkező átmenetek belépési helyeit és egyesítsük ezeket a helyeket. Azaz, ha például s egy olyan hely Ω-ban, hogy ${}^{\bullet}s = \{t_1\}$ és $s^{\bullet} = \{t_2, t_3\}$, akkor vegyük az összes lehetséges kombinációját s_1, s_2, s_3-nak, úgy hogy s_1 egy kilépési hely Σ_1-ben, s_2, s_3 pedig egy-egy belépési hely Σ_2-ben illetve Σ_3-ban és készítsünk egy új helyet s_1, s_2 és s_3 összevonásával. Végezzük ezt el az összes $s \in S_{\Omega}$-ra.

4.44. Definíció. *(Hálófinomítás)*
Legyen Ω egy operátor doboz, Σ pedig egy $\Omega - n$-es. Σ Ω szerinti *hálófinomítását*, $\Omega(\Sigma)$-t úgy kapjuk meg, hogy minden Σ-beli Σ_v-re vesszük a megfelelő $\lambda_\Omega(v)$ szerinti interfész váltást, majd az így kapott új hálókat felhasználva elvégezzük az Ω szerinti átmenetfinomítást.

4.10. Példa. *(Ω operátordoboz az elöbbi ρ_1 és ρ_2 átcimkézéssel.)*

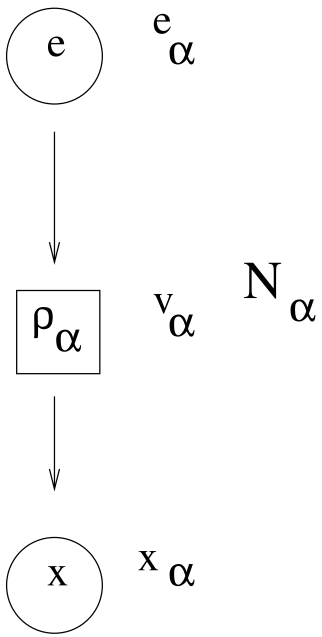


4.11. Példa. $(\Omega(\Sigma))$



Alap doboz
Legyen $\alpha \in Lab$ egy esemény, ekkor N_α egy alap doboz.($\rho_\alpha = \{(\emptyset, \alpha)\}$)
Megjegyzés
N_α egy statikus doboz (azaz nem operátor doboz).

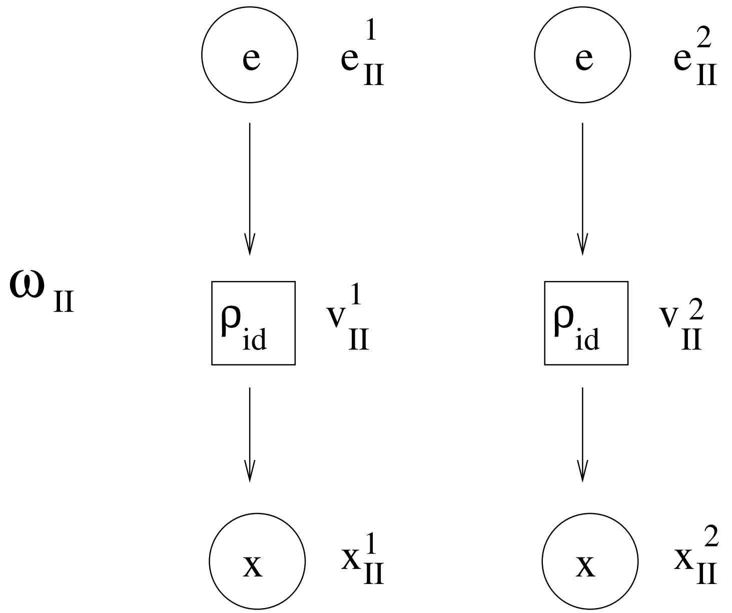
4.12. Példa. *(N_α)*



Speciális operátor dobozok

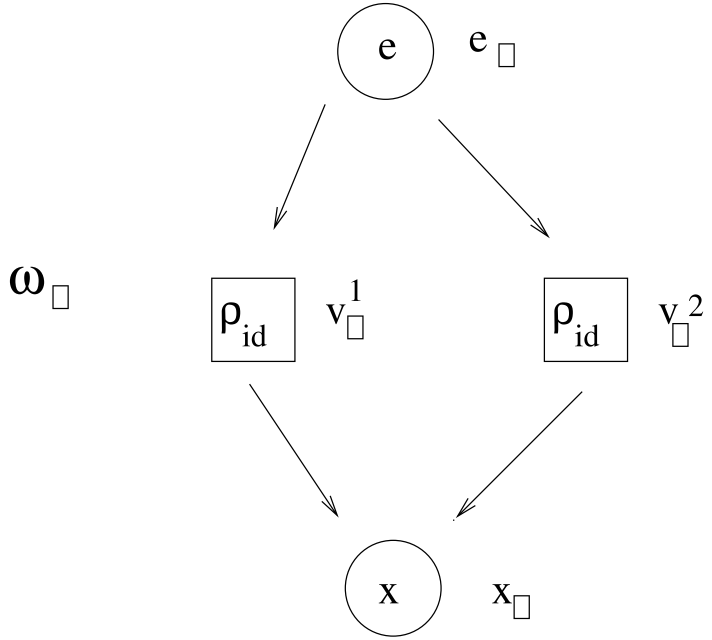
4.45. Definíció. *(Párhuzamos kompozíció)*
Ω_{II} operátor doboz két teljesen különálló másolatot készít Σ_1-ből és Σ_2-ből, abban az esetben is, ha Σ_1 és Σ_2 megegyezik.

4.13. Példa. (Ω_{II})



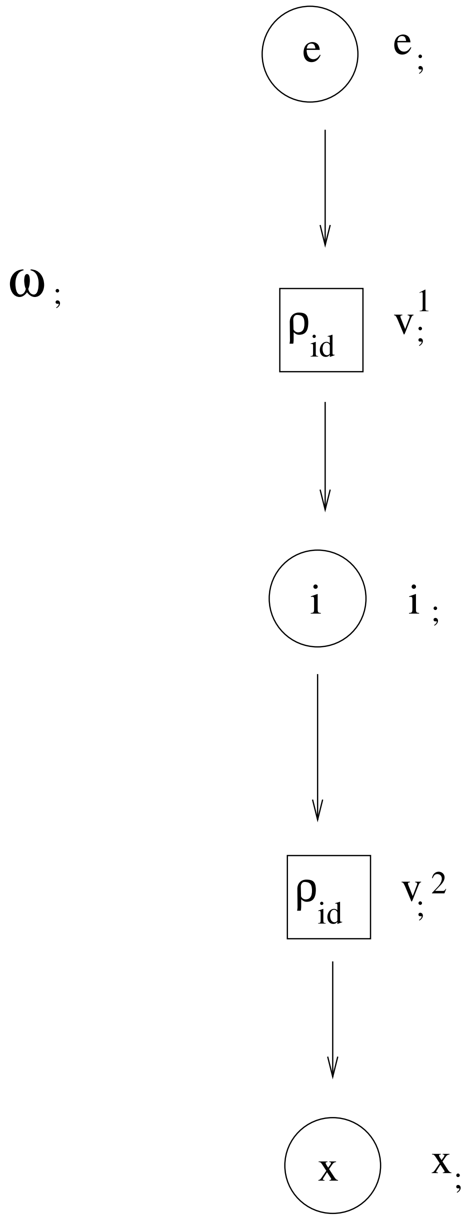
4.46. Definíció. *(Elágazás)*
$\Omega_{\Box}$ egy elágazásban összekapcsolja Σ_1-et és Σ_2-t.

4.14. Példa. *($\Omega_{\Box}$)*



4.47. Definíció. *(Szekvenciális kompozíció)*
$\Omega_;$ szekvenciálisan összekapcsolja Σ_1-et és Σ_2-t.

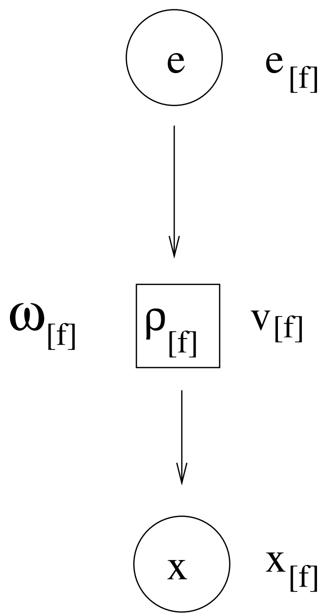
4.15. Példa. *($\Omega_;$)*


e
e;
ω;
ρ id
v;1
i
i ;
ρ id
v;2
x
x;

Legyen A a primitív események halmaza, és $Lab = mult(A)$.

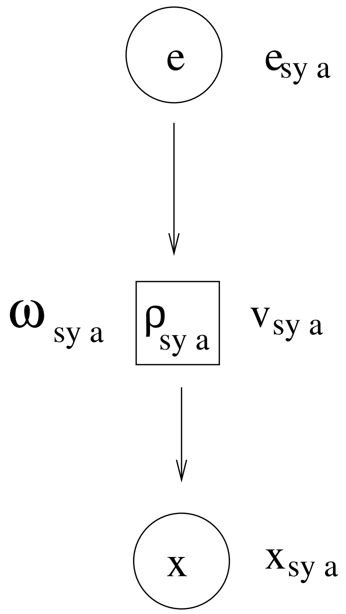
4.48. Definíció. *(Alap átnevezés)*
Legyen $f : A \to A$ egy függvény, amelyet kiterjesztünk a Lab halmazra. $(\forall \alpha \in Lab : f(\alpha)(f(a)) = \alpha(a).)$
Legyen $\rho_{[f]} = \{(\{\alpha\}, f(\alpha))|\alpha \in Lab\}$
Ekkor $\Omega_{[f]}$ átnevezi Σ_1 minden átmenetét f szerint.

4.16. Példa. $(\Omega_{[f]})$



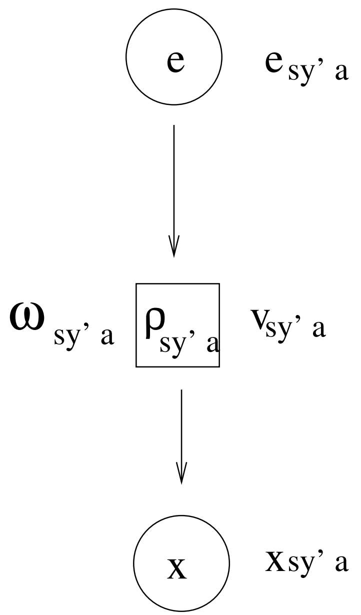
4.49. Definíció. *(Szinkronizáció)*
Legyen $a \in A$ és $\rho_{sy\ a}$ a legszűkebb olyan átcímkézés, amely tartalmazza ρ_{id}-et, és ha $(\Gamma, \alpha + \{a\}) \in \rho_{sy\ a}$ és $(\Delta, \beta + \{\hat{a}\}) \in \rho_{sy\ a}$, akkor $(\Gamma+\Delta, \alpha+\beta) \in \rho_{sy\ a}$. Ekkor $\Omega_{sy\ a}$ a Σ_1 szinkronizációja az a esemény szerint.

4.17. Példa. *($\Omega_{sy\ a}$)*



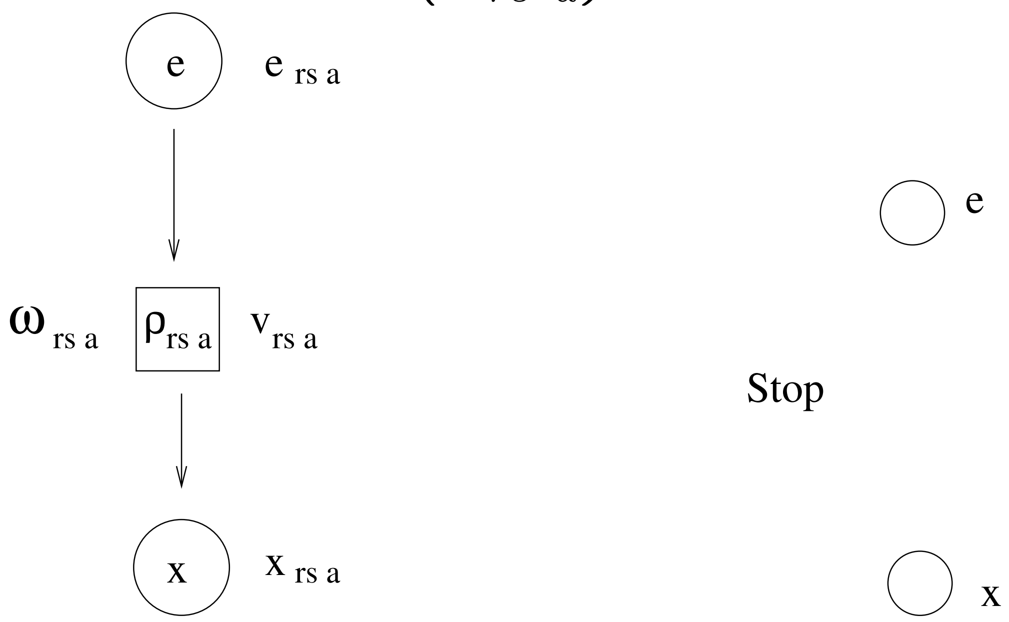
4.50. Definíció. *(Önszinkronizáció)*
Legyen $a \in A$ és $\rho_{sy'\ a}$ a legszűkebb olyan átcímkézés, amely tartalmazza $\rho_{sy\ a}$-t, és ha $(\Gamma, \alpha + \{a, \hat{a}\}) \in \rho_{sy'\ a}$, akkor $(\Gamma, \alpha) \in \rho_{sy'\ a}$. Ekkor $\Omega_{sy'\ a}$ a Σ_1 önszinkronizációja az a esemény szerint.

4.18. Példa. *($\Omega_{sy'\ a}$)*



4.51. Definíció. *(Megszorítás)*
Legyen $a \in A$ és $\rho_{rs\ a} = \rho_{mult(A \setminus \{a, \hat{a}\})}$.
Ekkor $\Omega_{rs\ a}$ a Σ_1 megszorítása az a esemény szerint.

4.19. Példa. *($\Omega_{rs\ a}$)*

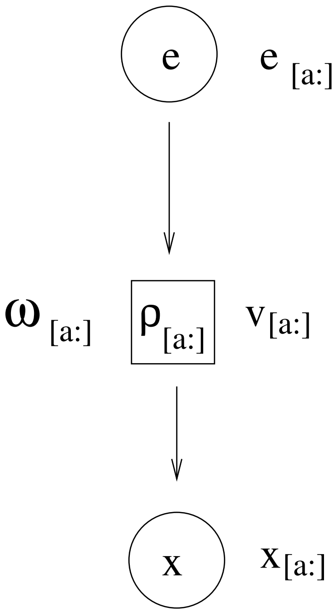


Megjegyzés: Stop doboz.

4.52. Definíció. *(Hatókör)*
Legyen $a \in A$ és $\rho_{[a:]} = \{(\Gamma, \alpha) | \alpha(a) = \alpha(\hat{a}) = 0 \wedge (\Gamma, \alpha) \in \rho_{sy\ a}\}$.
Ekkor $\Omega_{[a:]}$ a Σ_1 háló a esemény szerinti hatóköre.

Megjegyzés: Ez gyakorlatilag az előző két operátor kombinációja.

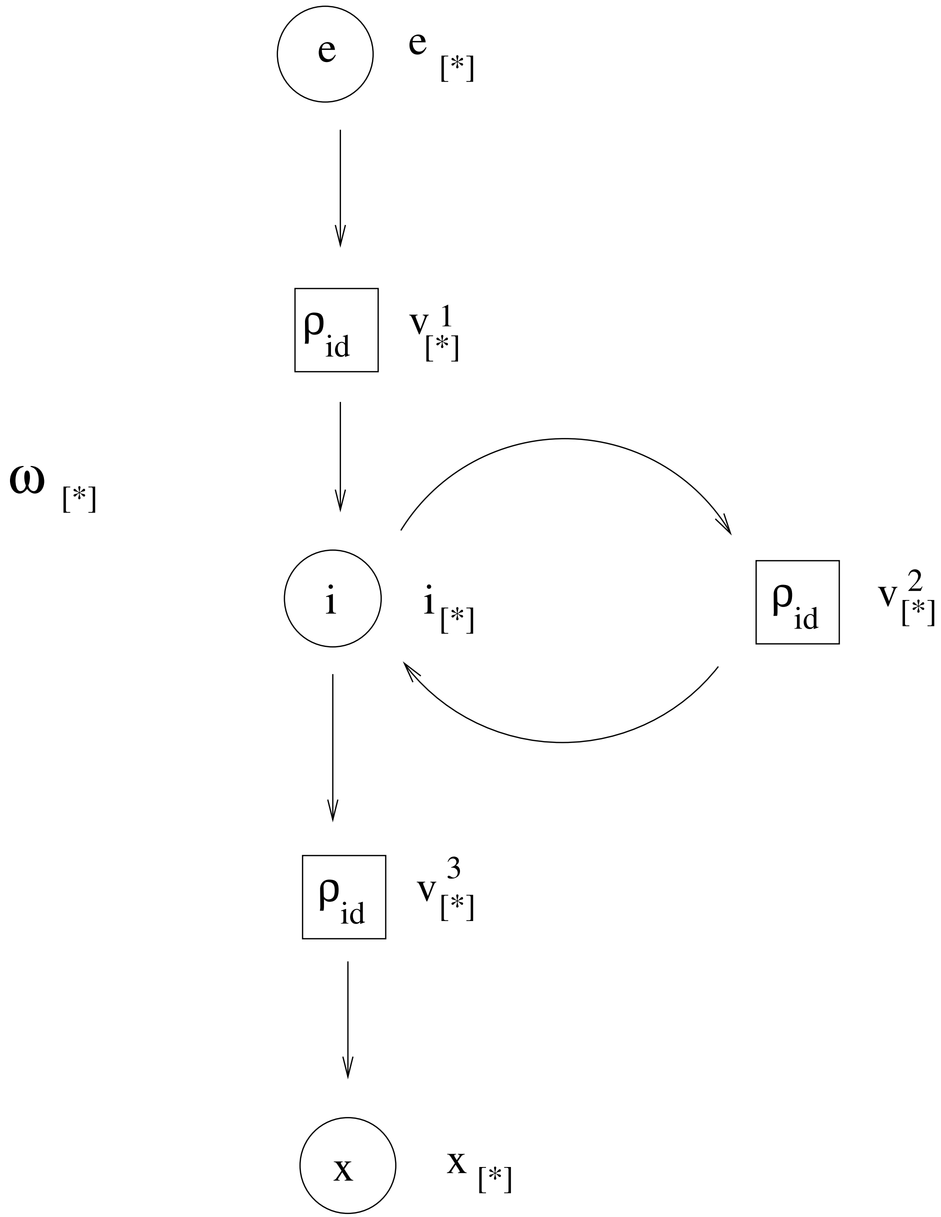
4.20. Példa. *($\Omega_{[a:]}$)*



4.53. Definíció. *(Iteráció (ciklus))*
$\Omega_{[*]}$ a $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ hálók iterációja.

Megjegyzés: Ezzel az operátorral kapott háló nem mindig biztonságos, viszont mindig 2-korlátos. Létezik olyan iteráció operátor, amely biztonságos hálót ad.

4.21. Példa. *($\Omega_{[*]}$)*



e
$e_{[*]}$
ρ_{id}
$v^1_{[*]}$
$\omega_{[*]}$
i
$i_{[*]}$
ρ_{id}
$v^2_{[*]}$
ρ_{id}
$v^3_{[*]}$
x
$x_{[*]}$

Petri doboz kifejezések szintaxisa:

$$\text{E} ::= \alpha \mid E||E \mid E\Box E \mid E;E \mid [E*E*E] \mid$$
$$X \mid E \texttt{ sy } a \mid E[f] \mid E \texttt{ rs } a \mid [a:E]$$

α egy alap esemény vagy multiesemény ($\alpha \in Lab_{PBC} = mult(A_{PBC})$).
X egy változó a χ előre definiált *hierarchikus* változóhalmazból.
Minden X-hez tartozik egy egyértelmű definiáló egyenlőség $X \stackrel{df}{=} E$.
(A különböző szintű absztrakciót segítí.)
f egy átnevező függvény $f : A_{Lab} \times A_{Lab}$.
Az operátorokat két részre bonthatjuk a három bináris operátor, a $||$ párhuzamos operátor, az $\Box$ elágazás, a ; szekvencia és a 3-áris $[**]$ ciklus operátor *vezérlő szerkezet operátor*. Míg az unáris operátorok, azaz az $[f]$ alap átnevezés, a $sy\ a$ szinkronizáció, a $rs\ a$ megszorítás és a $[a:]$ hatókör operátor *kommunikációs interface operátorok*.

Példák:

$E_0 = \emptyset$

$E_1 = \{\widehat{a}, b\}$

$E_2 = (a; b)\Box c$

$E_3 = a; (b\Box c)$

$E_4 = a||b$

$E_5 = (a||b)\Box c$

$E_6 = ((a; b)\Box c)\ rs\ c$

$E_7 = (a||b)\ rs\ b$

$E_8 = (a||\widehat{a})\ sy\ a$

$E_9 = ((a||\{\widehat{a}, \widehat{a}\})||a)\ sy\ a$

Megjegyzés: Az egyszerűség kedvéért $\{a\} \in Lab_{PBC}$-t gyakran helyetesítjük a-val.

Példa:

```
...
  begin var x:{0,1};
        [x:=x+1] || [x:=y]
  end
...
```

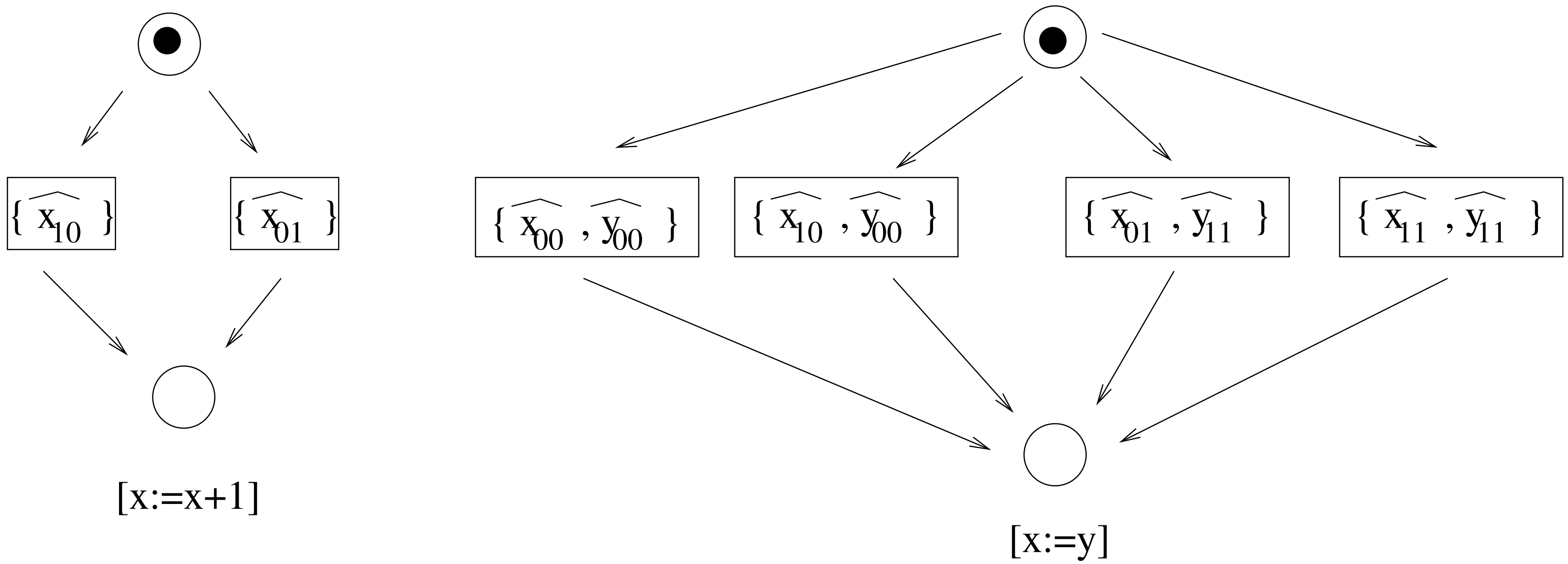
Megjegyzés: Feltételezzük, hogy y szintén egy $\{0,1\}$ halmazbeli változó, amit korábban deklaráltunk, az összeadás modulo 2 értendő, [] pedig az atomi akciókat jelzi.

Legegyszerűbben a következőképpen modellezhetjük a fenti programot:
Bevezetjük a $x_{vw}, x_{\widehat{vw}}$ akciókat, ahol $v, w \in \{0, 1\}$, és egy ilyen akció átállítja az x értékét v-ről w-re.

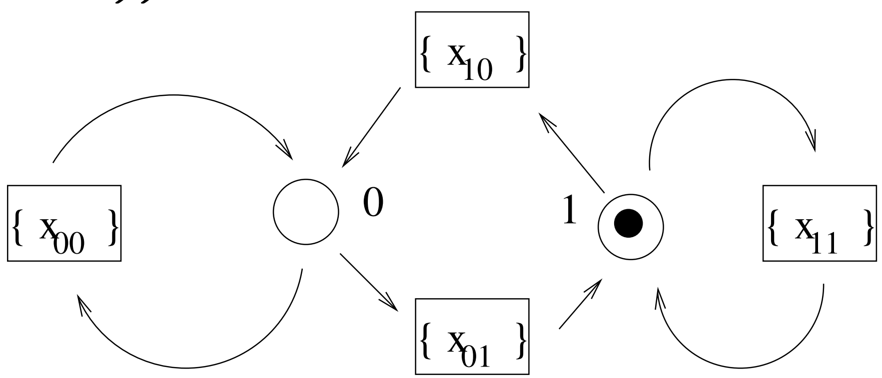
$[x := x + 1] \rightsquigarrow \{x_{\widehat{01}}\} \Box \{x_{\widehat{10}}\}$

$[x := y] \rightsquigarrow \{x_{\widehat{00}}, y_{\widehat{00}}\} \Box \{x_{\widehat{10}}, y_{\widehat{00}}\} \Box \{x_{\widehat{01}}, y_{\widehat{11}}\} \Box \{x_{\widehat{11}}, y_{\widehat{11}}\}$

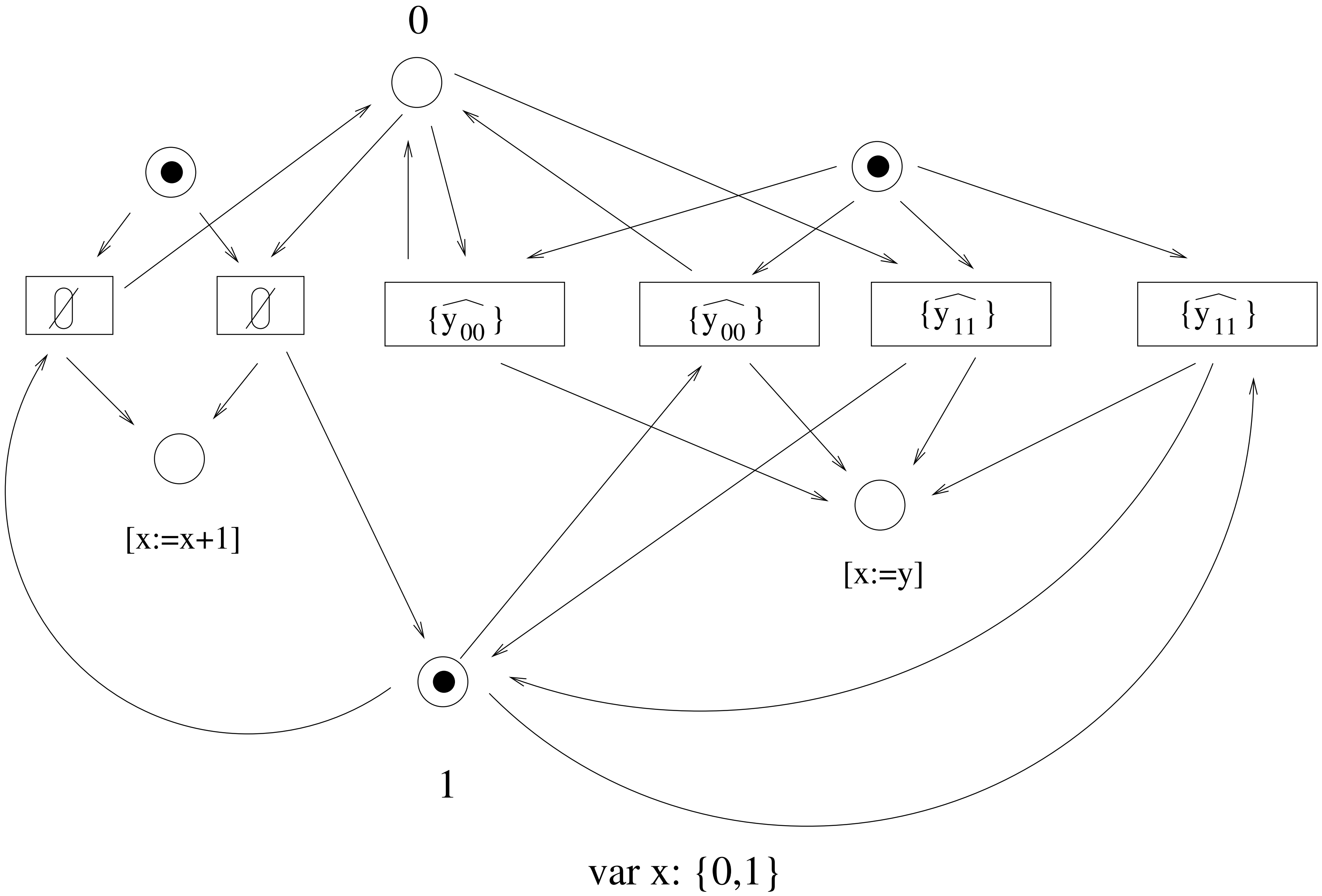
4.22. Példa. *([x:=x+1] és [x:=y] reprezentálása)*



4.23. Példa. *(A bináris x változó reprezentálása (egyszerübb alak))*



4.24. Példa. *(Az x változók szinkronizálásával, majd megszorítással kapott háló (hatókör))*


0
$\emptyset$
$\emptyset$
$\{\widehat{y_{00}}\}$
$\{\widehat{y_{00}}\}$
$\{\widehat{y_{11}}\}$
$\{\widehat{y_{11}}\}$
[x:=x+1]
[x:=y]
1
var x: {0,1}

Változók ábrázolása.

Legyen $Type(x)$ x tipusa Egy x programváltozóhoz a következő petridobozt rendeljük:

$box_{PBC}([x()]) \;=\; N_{[x()]} = (S_x, T_x, W_x, \lambda_x, \emptyset)$, ahol

$S_x \;=\; \{e_x, x_x\} \cup \{i_x^u \mid u \in Type(x)\}$

$T_x \;=\; \{v_x^{\bullet u}, v_x^{u\bullet} \mid u \in Type(x)\} \cup \{v_x^{uv} \mid u, v \in Type(x)\}$

A W_x élfüggvény a $\{(e_x, v_x^{\bullet u}),\ (v_x^{\bullet u}, i_x^u),\ (i_x^u, v_x^{uv}),\ (v_x^{uv}, i_x^v),\ (i_x^u, v_x^{u\bullet}),\ (v_x^{u\bullet}, x_x) \mid u, v \in Type(x)\}$ halmazbeli párokhoz rendel 1 súlyt, míg a többihez 0 súlyt.

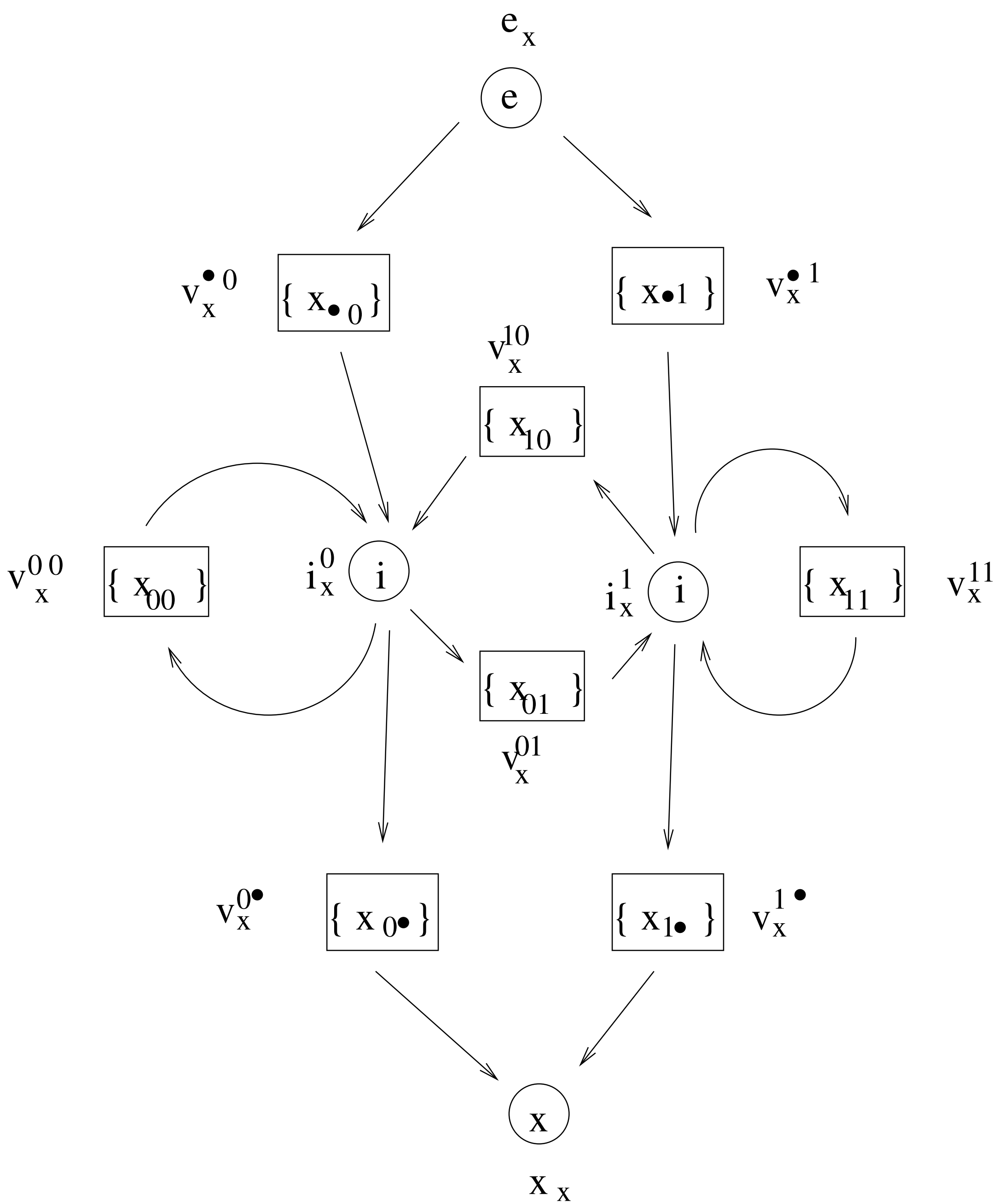
A címkefüggvény pedig minden $u, v \in Type(x)$ értékre az alábbi:

$\lambda_x(e_x) = e \quad \lambda_x(x_x) = x \quad \lambda_x(i_x^u) = i$

$\lambda_x(v_x^{\bullet u}) = \{x_{\bullet u}\} \quad \lambda_x(v_x^{u\bullet}) = \{x_{u\bullet}\} \quad \lambda_x(v_x^{uv}) = \{x_{uv}\}$

4.25. Példa. *(A bináris x változó reprezentálása (teljes alak).)*

$N_{[x()]}$



e_x
e
$v_x^{\bullet 0}$
$\{x_{\bullet 0}\}$
$\{x_{\bullet 1}\}$
$v_x^{\bullet 1}$
v_x^{10}
$\{x_{10}\}$
v_x^{00}
$\{x_{00}\}$
i_x^0
i
i_x^1
i
$\{x_{11}\}$
v_x^{11}
$\{x_{01}\}$
v_x^{01}
$v_x^{0\bullet}$
$\{x_{0\bullet}\}$
$\{x_{1\bullet}\}$
$v_x^{1\bullet}$
x
x_x

$Razor$ **konkurrens programozási nyelv**

Szintaxis

1. $Program ::= Block$

2. $Block ::= \texttt{begin}\ Body\ \texttt{end}$

3. $Body ::= Decl; Body \mid Com$

4. $Decl ::= \texttt{var}\ id : Set \mid \texttt{var}\ chanid : \texttt{chan}\ Capacity\ \texttt{of}\ Set$

5. $Com ::= Block \mid [Act] \mid Com_1; Com_2 \mid Com_1 || Com_2 \mid$
$\texttt{if}\ GC_1 \ \square\ \dots\ \square\ GC_m\ \texttt{fi} \mid \texttt{do}\ GC_1\ \square\ \dots\ \square\ GC_m\ \texttt{od}$

6. $Act ::= id := Expr \mid chanid?x \mid chanid!Expr$

7. $GC ::= GC; Com \mid [Bexpr] \mid [Bexpr; Act]$

8. $Expr ::= id \mid Const \mid Expr\ Binop\ Expr \mid Unop\ Expr \mid Bexpr$

9. $$\begin{aligned} Bexpr ::= {} & boolid \mid \mathtt{false} \mid \mathtt{true} \mid \\ & Bexpr\ Boolop\ Bexpr \mid \neg Bexpr \mid Expr\ Relop\ Expr \end{aligned}$$

10. $Binop ::= + \mid - \mid * \mid \mathtt{mod} \mid \mathtt{div}$

11. $Unop ::= + \mid -$

12. $Boolop ::= \wedge \mid \vee \mid \rightarrow$

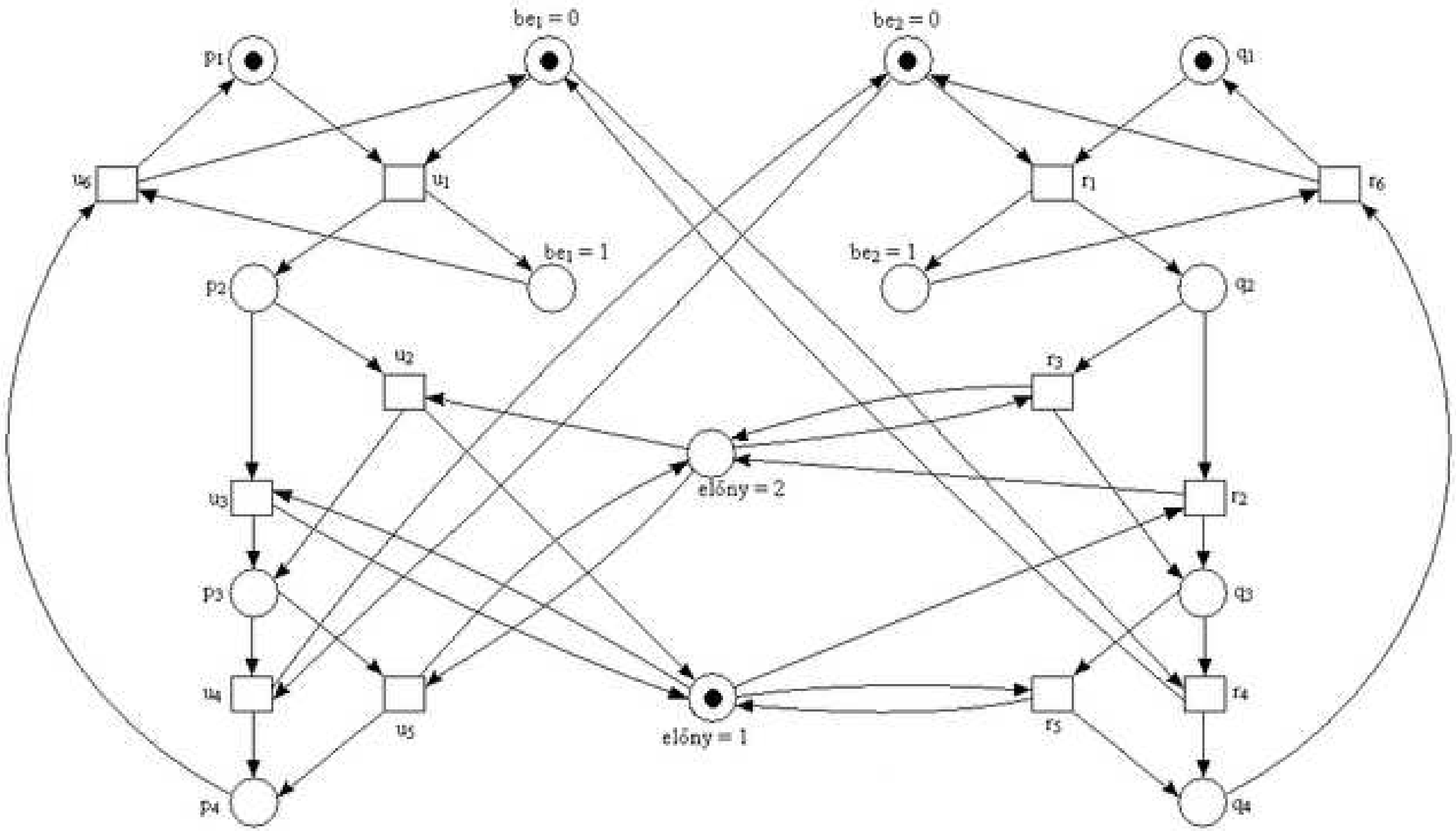
13. $Relop ::= \; = \mid \neq \mid < \mid \leq$

Megjegyzés: GC: őrfeltételes utasítás, $c?x$ egy érték levétele a csatornáról az x változóba, $c!Expr$ az $Expr$ kifejezés által megadott érték elhelyezése a csatornán.

Egy ilyen program szemantikája megadható Petri doboz kifejezésekkel.

Peterson algoritmus

```
begin
var be1, be2 : {0,1} (init 0); előny : {1, 2} (init 1);
 do                                    ||  do
     [be1 := 1];                   a1  ||      [be2 := 1];                   b1
     [előny := 1];                 a2  ||      [előny := 2];                 b2
     if [be2 = 0]                      ||      if [be1 = 0]
       □ [(előny ≠ 1)]  fi;        a3  ||        □ [(előny ≠ 2)]  fi;        b3
     KritikusSzakasz1;                 ||      KritikusSzakasz2;
     [be1 := 0];                   a4  ||      [be2 := 0];                   b4
 od                                    ||  od
end
```



be1 = 0
be2 = 0
p1
q1
u6
u1
r1
r6
be1 = 1
be2 = 1
p2
q2
u2
r3
u3
előny = 2
r2
p3
q3
u4
u5
r5
r4
előny = 1
p4
q4

Az ábrán az u_1 átmenet felel meg az algoritmusbeli a_1 műveletnek, az u_2 és u_3 átmenet az a_2 műveletnek, az u_4 és u_5 átmenet az a_3 műveletnek, és az u_6 átmenet az a_4 műveletnek. A $KritikusSzakasz_1$ programrészbe való belépést pedig a p_4 hely modellezi. Szimmetrikusan az r_j átmenetek felelnek meg a megfelelő b_i műveletnek és a $KritikusSzakasz_2$ programrészbe való belépést a q_4 hely modellezi.

Bizonyítható, hogy a két párhuzamos folyamat nem léphet be egyszerre a kritikus szakaszába. Ez a Petri-háló szintjén azt jelenti, hogy nem lehet egyszerre súly a p_4 és q_4 helyek mindegyikén.

$$
\begin{aligned}
\theta_1 &= \{p_1, p_2, p_3, p_4\},\\
\theta_2 &= \{q_1, q_2, q_3, q_4\},\\
\theta_3 &= \{\mathit{előny} = 1, \mathit{előny} = 2\},\\
\theta_4 &= \{be_1 = 0, be_1 = 1\},\\
\theta_5 &= \{be_2 = 0, be_2 = 1\},\\
\theta_6 &= \{be_1 = 0, p_2, p_3, p_4\},\\
\theta_7 &= \{be_2 = 0, q_2, q_3, q_4\}.
\end{aligned}
$$

Ezek a helyhalmazok helyinvariánsok (a súlyösszegük invariáns), melyek kezdetben egy súlyt tartalmaznak.

$F_1 = \{be_1 = 0, p_2, \textit{előny} = 1, q_3\}$,
$F_1 = \{be_2 = 0, q_2, \textit{előny} = 2, p_3\}$.

Ezek olyan csapdák, melyekben kezdetben egy-egy súly van.

Tegyük fel, hogy valamely, a kezdeti súlyozásból elérhető M súlyozás a p_4 és q_4 helyek mindegyikére helyez súlyt. Felhasználva, hogy θ_6 és θ_7 helyinvariáns, ebből az következik, hogy a többi hely, amely a θ_6 vagy θ_7 halmazban van, nem tartalmaz súlyt:

$M(be_1 = 0) = M(p_2) = M(p_3) = M(be_2 = 0) = M(q_2) = M(q_3) = 0$.

Mivel θ_3 is helyinvariáns, ezért az *előny* $= 1$, illetve *előny* $=$ 2 helyek közül csak az egyiken lehet súly. Ebből viszont az következik, hogy az F_1, F_2 csapdák valamelyike üres, ami ellentmondás.

Tehát végeredményképpen azt kaptuk, hogy nem létezik olyan elérhető súlyozás, amely a p_4 és q_4 helyek mindegyikére helyez súlyt, azaz Peterson-algoritmusa valóban teljesíti a kölcsönös kizárás követelményét.

1. Petri háló def., működési szabály, forrás, nyelő átmenet, átlátszó, normális háló. Példák: H_2 O, csoki automata, evő filozófusok.

2. Kapacitás korlát, működési szabályok, korlátos kapacitású helyek kiküszöbölése.

3. Példák: Konkurencia, kommunikáció, konfliktus, zavar, iró olvasó probléma.

4. Példák: Termelő-fogyasztó probléma (prioritás), szelektív várakozás , adatfolyam, nyelvelfogadás.

5. Viselkedési tulajdonságok: (k-korlátos, biztonságos, eleven, visszatérési képesség, lefedhetőség, megbizhatóság.) Példák.

6. Szinkronizációs távolság, pártatlanság.Példák.

7. Petri hálók osztályozása: állapotgép, jelzett háló, FC, EFC, AC hálók. Csapda, szifon.Elevenséget, biztonságosságot, korlátosságot megörző transzformációk.

8. Elérhetőségi, fedési fa. Példák. Tételek.

9. Petri hálók elevensége, biztonságossága. Állapotgép, jelzett gráf elevensége, biztonságossága. Mini-max tétel. Eleven jelzett háló biztonságossága. Jelzett háló eleven és biztonságos súlyozása.

10. VÉH definíciók, tételek. Elevenség és biztonságosság FC, AC hálókban.

11. Átcímkézés, speciális átcímkézések. Címkézett petri háló. Bemenő, kimenő, belső helyek. Lépés szekvencia, példa.

12. T-megszorítás, ex-megszorítás, ex-irányított, ex-kizárólagos háló, ex-asszimetrikus átmenet, függetlenség reláció. Súlyozást módosító műveletek. Petri doboz def.

13. Sima doboz, Tiszta súlyozás. Statikus, dinamikus doboz. Belépési, kilépési doboz, jelölések. Dinamikus dobozra vonatkozó tétel. Operátor doboz def.

14. Komplex súlyozás, kiterjesztett definíciók(I-II).

15. Interface váltás, példa.

16. Átmenet finomítás, hálófinomítás, példa.

17. Alap doboz, speciális operátor dobozok (párhuzamos, szekvenciális kompozíció, elágazás, átnevezés, szinkronizáció, önszinkronizáció, megszorítás, hatókör, iteráció).

18. Petri doboz kifejezések szintaxisa. Példák. $x := x+1 \mid\mid x := y$ reprezentálása.

19. Változók reprezentálása, bináris példa.

20. Razor szintaxis. Peterson algoritmus.